SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Matteo Giovanditti

OMOGENEIZZAZIONE PER OPERATORI TIPO KOLMOGOROV-FOKKER-PLANCK

24 aprile 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Sommario. In questo lavoro abbiamo studiato un modello di omogeneizzazione per una classe di operatori tipo Kolmogorov-Fokker-Planck in forma di divergenza. Le proprietà di questa classe di operatori sono state oggetto di una ricerca sistematica solo negli ultimi anni, a partire dal lavoro di Lanconelli e Polidoro [15]. In questo lavoro, in particolare, vengono studiate le proprietà fondamentali della classe di operatori di evoluzione considerata, nel caso in cui i coefficienti soddisfino alcune ipotesi: la classe di operatori considerata è di tipo Hörmander e risulta invariante rispetto ad un particolare gruppo di traslazioni e rispetto ad una certa famiglia di dilatazioni. L' esistenza di tale gruppo omogeneo è l' ingrediente basilare per sviluppare uno schema di omogeneizzazione. Infatti la teoria esistente sull' omogeneizzazione si basa essenzialmente sull' azione delle usuali traslazioni e dilatazioni di tipo euclideo in $\mathbb{R}^n$. In questo lavoro, invece, abbiamo sviluppato una teoria analoga basata, però, sulla esistenza di altri gruppi ed adattata quindi ad operatori invarianti rispetto a tali gruppi come in Biroli-Mosco-Tchou (si vedano [28] e [29]) che hanno considerato un problema analogo, nel caso stazionario, per operatori ellittici degeneri associati al gruppo omogeneo di Heisenberg. In sostanza la costruzione di un particolare *pavage* dello spazio utilizzando il gruppo di traslazioni e di omotetie associate con la classe di operatori tipo Kolmogorov-Fokker-Planck considerata, permetterà, in analogia con la teoria classica dell' omogeneizzazione, la formulazione di un problema di omogeneizzazione periodica. Inoltre attraverso un procedimento di regolarizzazione, definito come *regolarizzazione subellittica*, riusciamo a lavorare nel contesto delle soluzioni deboli analogamente al caso classico. Al contrario di questo ultimo, non applichiamo il metodo standard dell' energia per provare i voluti risultati di convergenza nel procedimento di omogeneizzazione, ma ci basiamo su un metodo alternativo, noto con il nome di *sviluppo aggiunto*, il cui ingrediente fondamentale è la costruzione di una classe di funzioni test grazie ad un particolare metodo di regolarizzazione dei coefficienti dell' operatore studiato. Infine otteniamo il voluto risultato di convergenza ma a meno di una sottosuccessione, a causa dell' assenza di risultati di unicità per la soluzione debole del problema omogeneizzato.

Abstract. In this paper we study an homogenization model for a class of Kolmogorov-Fokker-Planck operators in divergence form. The features of this class of operators were subject of a systematic research only in the last years, starting from Lanconelli and Polidoro work [15]. In that paper, in particular, the essential properties of the considered class of evolution operators are studied, when the coefficients satisfy some conditions: indeed the class of operators is of Hörmander type and it is invariant with rispect to suitable groups of translations and dilations. The existence of such an homogenous group is the main ingredient in order to develop an homogenization scheme. In fact, as we will show in the first part of this paper, the existing homogenization theory refers to the action of the usual translation and dilation of euclidean type on $\mathbb{R}^N$. On the other hand, in this work, we have developped a similar theory which requires the existence of other groups and suitable for operators invariant for such a groups, following the Biroli-Mosco-Tchou ideas (see [28] and [29]) who considered a similar problem, in the stationary case, for degenerate elliptic operators associated with the homogeneous Heisenberg group. Substancially the costruction of a particular *pavage* of the space using translations and dilations group associated with the class of Kolmogorov-Fokker-Planck operators, will allow, as in the classical homogenization theory, the definition of periodic homogenization problem. Furthermore using a procedure of regularization, defined as *subelliptic regularization*, we are enable to consider weak solutions, as in the classical case. Despite the latter case, we don' t use the standard method of energy to proof the desired convergence results, but we will use an alternative method, known as *adjoint expansion*, which the most important feature is the contruction of test functions class using a peculiar regularization method of the coefficients of studied operator. Finally we obtain the expected convergence result but up to a subsequence, because the absence of unicity results for weak solution of homogenized problem.

1 Introduzione

I materiali compositi (fibrati, stratificati, porosi,...) giocano un ruolo molto importante in vari campi della Meccanica, della Fisica, della Chimica e della Ingegneria. In termini molto generali, un mezzo composito è un mezzo altamente non omogeneo e non isotropo, con delle eterogeneità al suo interno che ne alterano da luogo a luogo le proprietà fisiche rilevanti. Quindi i parametri fisici (come la conduttività, i coefficienti di elasticità,...) di questi materiali sono tipicamente discontinui ed oscillano tra i differenti valori che caratterizzano ognuno dei componenti. Quando questi componenti sono finemente miscelati, questi parametri oscillano molto rapidamente e la struttura microscopica diventa abbastanza complicata. Pertanto questi materiali sono fortemente eterogenei, se osservati ad un livello microscopico, ma esibiscono il comportamento tipico di un materiale omogeneo ideale, quando sono osservati su scala macroscopica.

Allora, possiamo pensare di ottenere una buona approssimazione del comportamento *macroscopico* di questo materiale eterogeneo, mandando a zero il parametro ε_h, che descrive la finezza della struttura microscopica nelle equazioni che intervengono in fenomeni come, ad esempio, la conduzione del calore o l'elasticità. Questo è lo scopo della *teoria dell' omogeneizzazione*, ossia descrivere tali processi limite, quando ε_h tende a zero.

Più precisamente, l'*omogeneizzazione* si occupa dell' analisi asintotica di equazioni alle derivate parziali governanti alcuni processi fisici che intervengono in materiali eterogenei con una struttura periodica, quando la lunghezza caratteristica del periodo ε_h tende a zero.

Un buon modello per lo studio del comportamento fisico di un materiale eterogeneo con una struttura periodica molto fine, come in elettrostatica, in magnetostatica, o quando si considera la parte stazionaria della diffusione del calore, è dato dal seguente

$$\begin{cases} -div(a(\frac{x}{\varepsilon_h})Du_h) &= f \text{ in } \Omega\,, \\ u_h|_{\partial\Omega} &= 0 \text{ su } \partial\Omega\,; \end{cases} \tag{1}$$

qui Ω è un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ che consideriamo come una parte del materiale eterogeneo ed ε_h è il periodo della struttura in tutte le direzioni.

La funzione u_h può essere interpretata, in base al campo di applicazione, come il potenziale elettrico, oppure come il potenziale magnetico, o come la temperatura. La matrice dei coefficienti $a(\frac{x}{\varepsilon_h}) = (a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_h}))$ è costituita da funzioni ε_h-*periodiche* e descrive le proprietà fisiche dei differenti materiali costituenti il corpo preso in esame (essi sono i coefficienti dielettrici, ad esempio, o la permeabilità magnetica oppure i coefficienti di conduttività termica).

La funzione f è un termine di sorgente assegnato. Un semplice esempio, per chiarire le idee, è fornito dal miscuglio fine di due materiali della stessa natura ma di caratteristiche quantitativamente diverse, come due materiali conduttori di conducibilità diverse c_1 e c_2. Un mezzo di questo tipo può essere descritto da un tensore di coefficienti caratteristici $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ $i,j = 1,\ldots,n$, discontinuo nella variabile $x \in \mathbb{R}^n$, con $a_{ij}(x) = c_1$ nella parte del corpo occupata dal materiale 1 e con $a_{ij}(x) = c_2$ nella regione occupata dal materiale 2. Quindi, ritornando al nostro problema, se il periodo della struttura è molto piccolo, una approssimazione numerica diretta della soluzione del problema (1) può essere molto difficile se non impossibile.
Pertanto l'omogeneizzazione ci fornisce un modo alternativo di approssimare tali soluzioni u_h tramite l'utilizzo di una funzione u che risolve il problema corrispondente ad un materiale *omogeneizzato*

$$\begin{cases} -div(bDu) &= f \text{ in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \text{ su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

dove b è una matrice costante (ricordiamo che per un materiale omogeneo le proprietà fisiche non dipendono da x). La matrice *omogeneizzata* b rappresenta i parametri fisici di un corpo omogeneo, il cui comportamento è equivalente, da un punto di vista *macroscopico*, a quello del materiale con microstruttura periodica assegnata (descritto tramite la (1)). Quindi la idea è quella di sostituire, in una prima approssimazione, il comportamento del materiale *reale* non omogeneo con struttura ε_h - periodica con quello *ideale* omogeneo e dunque sostituire le soluzioni u_h con la soluzione u relativa al problema (2) più idonea ad essere trattata da un punto di vista numerico perché soluzione di una equazione a coefficienti costanti.

Le principali referenze per la teoria dell' omogeneizzazione di strutture periodiche sono i libri di Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1], Sanchez Palencia [2], Lions [3], Bakhvalov-Panasenko [4], e Jikov-Kozlov-Oleinik [5]. Per quanto riguarda i principali risultati astratti di analisi funzionale che verranno sistematicamente utilizzati nel seguito (convergenza debole, spazi di Sobolev e loro proprietà, lemma di Lax-Milgram, disuguaglianza di Poincaré) ci riferiamo al testo di H. Brezis [6].

2 Definizione del problema e costruzione dell' operatore omogeneizzato

Siano $z_1,\ldots,z_n$ n vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$, e sia P il parallelotopo con lati $z_1,\ldots,z_n$, cioè

$$P = \{t_1 z_1 + \cdots + t_n z_n : 0 < t_i < 1, i = 1,\ldots,n\}$$

Diciamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è *P-periodica* se $\varphi(x) = \varphi(x + z_i)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $i = 1,\ldots,n$. In tal caso noi diciamo che P è una cella di periodicità della funzione φ. Per semplicità (ma senza perdita di generalità) noi assumeremo sin da ora che la cella di periodicità P sia il cubo unitario $Y =]0,1[^n$. Quindi se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è *Y-periodica* se $\varphi(x) = \varphi(x + e_i)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $i = 1,\ldots,n$.

Denotiamo con $\mathcal{M}_\#$ l'insieme di tutte le funzioni $a : \mathbb{R}^n \to M^{n\times n}$, con $a(x) = (a_{ij}(x))$ per $x \in \mathbb{R}^n$, soddisfacenti le seguenti proprietà:

(1.2.1) a_{ij} è Y-periodica in $\mathbb{R}^n$ per ogni $i,j = 1,\ldots,n$;

(1.2.2) $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $i,j = 1,\ldots,n$;

(1.2.3) esiste una costante $\alpha > 0$ tale che $(a(x)\xi,\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi^2|$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Definiamo $a^h : \mathbb{R}^n \to M^{n\times n}$ come

$$a^h(x) = a(\frac{x}{\varepsilon_h}), \tag{3}$$

dove ε_h è una successione di numeri reali positivi convergenti a zero. Si osservi, inoltre, che le funzioni a^h_{ij} sono $\varepsilon_h Y$-periodiche in $\mathbb{R}^n$. Sia Ω un dominio limitato ed aperto di $\mathbb{R}^n$ (lo considereremo come un pezzo del materiale eterogeneo in esame). Per un fissato $\varepsilon_h > 0$, consideriamo il seguente problema di Dirichlet ai valori al contorno su Ω

$$\begin{cases} -div(a^h(x)Du_h) &= f \text{ in } \Omega\,, \\ u_h|_{\partial\Omega} &= 0 \text{ su } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4}$$

dove f è una funzione assegnata su Ω. Assumiamo che $f \in H^{-1,2}(\Omega)$. La formulazione variazionale (debole) del problema (4) diventa: trovare $u_h \in H^{1,2}_0(\Omega)$ tale che

$$\begin{cases} \int_\Omega (a^h(x)Du_h, Dv)dx = \langle f, v\rangle \text{ per ogni } v \in H^{1,2}_0(\Omega) \\ u_h \in H^{1,2}_0(\Omega) \end{cases} \tag{5}$$

(si osservi che questa presentazione non richiede ipotesi di regolarità sui coefficienti a_{ij}; comunque, come vedremo, noi otterremo stime *a priori* su u_h che sono indipendenti da ε_h e che non si basano sulla regolarità dei coefficienti). Grazie al Lemma di Lax-Milgram si ottiene l' esistenza e l' unicità della soluzione del problema (5). Dunque da un punto di vista teorico il problema è completamente risolto.
Per studiare il comportamento asintotico delle soluzioni u_h del problema (4), dove supponiamo $f \in L^2(\Omega)$, una tecnica efficiente consiste nell' applicare lo sviluppo asintotico utilizzando scale multiple (ossia, variabili *lente* e *veloci*). Rimandiamo per questa tecnica ai testi citati, in particolar modo a quello di Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1] ed a quello di Sanchez-Palencia [2]. Più precisamente si suppone, in modo del tutto euristico, che u_h ammetta uno sviluppo in due scale della forma

$$u_h(x) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon_h}) + \varepsilon_h u_1(x, \frac{x}{\varepsilon_h}) + \varepsilon_h^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon_h}) + \ldots, \tag{6}$$

dove le funzioni $u_i(x, y)$ sono Y-periodiche in y per ogni $x \in \Omega$. Questo significa che noi postuliamo l' esistenza di funzioni regolari $u_i(x, y)$ definite in $\Omega \times R^n$, Y-periodiche in y ed indipendenti da ε_h in modo tale che il lato destro della (6), per $y = (\frac{x}{\varepsilon_h})$, sia uno sviluppo asintotico di $u_h(x)$.

Notiamo che le due variabili x e $(\frac{x}{\varepsilon_h})$ prendono in considerazione le due scale del fenomeno della omogeneizzazione; la variabile x è la variabile macroscopica, mentre la variabile $(\frac{x}{\varepsilon_h})$ si riferisce alla geometria *microscopica*. Il metodo che stiamo andando a sviluppare si rivelerà molto utile per ottenere le *giuste risposte* sul comportamento al limite delle soluzioni del problema (4). Facciamo osservare, per ultimo, che è tecnicamente complicato tenere in considerazione le condizioni al *contorno* quando cerchiamo la funzione u_h nella forma (6), e questo rappresenta al momento una sorgente di serie difficoltà tecniche per la giustificazione del metodo. Per maggiori dettagli su queste difficoltà si rimanda all' articolo di Sanchez-Palencia [7]. Il metodo, nondimeno, fornisce le risposte giuste poiché in questo particolare tipo di problemi molto spesso le condizioni al contorno sono in qualche modo irrilevanti. *L' idea del metodo è (semplicemente) quella di inserire la (6) nella (4) ed identificare le potenze successive di* ε_h. Per presentare questi calcoli in una forma molto semplice, data una funzione regolare $\Phi(x, y)$ di due variabili, definiamo la funzione $\Phi_h(x)$ tramite la

$$\Phi_h(x) = \Phi(x, \frac{x}{\varepsilon_h})$$

ed osserviamo che

$$\frac{\partial \Phi_h}{\partial x_i}(x) = (\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon_h}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i})(x, \frac{x}{\varepsilon_h}).$$

Allora, si può scrivere

$$\mathcal{A}^h \Phi_h = [(\varepsilon_h^{-2}\mathcal{A}_0 + \varepsilon_h^{-1}\mathcal{A}_1 + \varepsilon_h^0 \mathcal{A}_2)\Phi](x, \frac{x}{\varepsilon_h}), \tag{7}$$

dove

$$\mathcal{A}_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}) \tag{8}$$

$$\mathcal{A}_1 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}) \tag{9}$$

$$\mathcal{A}_2 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}). \tag{10}$$

Utilizzando la (6) e la (7), l' equazione (4) è soddisfatta, sotto l' ipotesi che a e le funzioni $u_i(x,y)$ siano sufficientemente regolari, se

$$(\mathcal{A}_0 u_0)(x, \frac{x}{\varepsilon_h}) = 0 \text{ in } \Omega\ , \tag{11}$$

$$(\mathcal{A}_0 u_1 + \mathcal{A}_1 u_0)(x, \frac{x}{\varepsilon_h}) = 0 \text{ in } \Omega\ , \tag{12}$$

$$(\mathcal{A}_0 u_2 + \mathcal{A}_1 u_1 + \mathcal{A}_2 u_0)(x, \frac{x}{\varepsilon_h}) = f \text{ in } \Omega\ ; \tag{13}$$

cerchiamo adesso di capire come dalle (11), (12) e (13), si possa costruire l' operatore omogeneizzato. Determiniamo le funzioni u_i risolvendo i seguenti problemi nei quali consideriamo x come un parametro fissato:

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_0 u_0)(x,\cdot) = 0 \text{ in } Y\ , \\ u_0(x,\cdot)\ Y\text{-periodica}\ ; \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_0 u_1)(x,\cdot) = -(\mathcal{A}_1 u_0)(x,\cdot) \text{ in } Y\ , \\ u_1(x,\cdot)\ Y\text{-periodica}\ ; \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_0 u_2)(x,\cdot) = f(x) - (\mathcal{A}_1 u_1 + \mathcal{A}_2 u_0)(x,\cdot) \text{ in } Y\ , \\ u_2(x,\cdot)\ Y\text{-periodica}\ . \end{cases} \tag{16}$$

Consideriamo questi problemi nel contesto delle soluzioni deboli. Cominciamo col ricordare un risultato di esistenza di soluzioni per un problema ai valori al contorno sul cubo unitario. Denotiamo con $H^{1,2}_{per}(Y)$ il sottoinsieme delle funzioni u di $H^{1,2}(Y)$ che hanno la stessa *traccia* su facce opposte di Y. Inoltre indichiamo con $H^{1,2}_{\#}(Y)$ il sottoinsieme di $H^{1,2}(Y)$ di tutte le funzioni con valore medio nullo e che hanno stessa traccia su facce opposte di Y.

Lemma 1 *Sia $F \in (H^{1,2}_{per}(Y))^*$. Allora il problema*

$$\begin{cases} \int_Y (a(y)D_y\phi, D_y\psi)dy = \langle F, \psi\rangle \text{ per ogni } \psi \in H^{1,2}_{per}(Y)\ , \\ \phi \in H^{1,2}_{\#}(Y) \end{cases} \tag{17}$$

ammette una unica soluzione se e solo se

$$\int_Y F(y)dy = 0. \tag{18}$$

Per la prova di questo lemma rimandiamo a [1], pag. 13. Sfruttiamo questo lemma per determinare le soluzioni dei problemi (14), (15) e (16).

Step 1: Studio del problema (14).

Utilizzando la formula di Green e ricordando le ipotesi di periodicità, si prova facilmente che il problema (14) può essere formulato in modo debole come segue: trovare $u_0(x,\cdot) \in H^{1,2}_{per}(Y)$ tale che

$$\int_Y (a(y)D_y u_0, D_y\psi)dy = 0 \text{ per ogni } \psi \in H^{1,2}_{per}(Y). \tag{19}$$

Ricordiamo che x gioca il ruolo di un parametro e che $D_y u_0$ è il gradiente nella variabile *periodica* y. Allora, grazie al Lemma (1) possiamo concludere che $u_0(x,\cdot)$ è determinata da (19) a meno di una costante. Prendendo $\psi = u_0(x,\cdot)$ nella (19) ed usando la condizione di ellitticità soddisfatta da a segue immediatamente che $u_0(x,\cdot)$ =costante, cioè

$$u_0(x,\cdot) = u_0(x). \tag{20}$$

Step 2: Studio del problema (15).

Utilizzando la (20), il problema (15) si riduce al seguente

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_0 u_1)(x,\cdot) = \sum_{i,j=1}^n (\frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(\cdot))\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \text{ in } Y\ , \\ u_1(x,\cdot)\ Y\text{-periodica.} \end{cases} \tag{21}$$

Questo è ancora un problema in y, dove x è un parametro. È possibile rappresentare u_1 in una forma molto semplice grazie alla separazione delle variabili nel lato destro della (21). Infatti, grazie alla formula di Green ed alle ipotesi di periodicità, la formulazione debole del problema (21) diventa: trovare $u_1(x,\cdot) \in H^{1,2}_{per}(Y)$ tale che

$$\int_Y (a(y)D_y u_1, D_y\psi)dy = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\int_Y a_{ij}D_{y_i}\psi dy \quad \forall \psi \in H^{1,2}_{per}(Y). \tag{22}$$

Allora consideriamo per $j = 1,\dots,n$ il problema

$$\begin{cases} \int_Y (a(y)D_y w^j(y), D_y\psi(y)) = -\int_Y (a(y)e_j, D_y\psi(y))dy \quad \forall \psi \in H^{1,2}_{\#}(Y), \\ w^j \in H^{1,2}_{\#}(Y). \end{cases} \tag{23}$$

Si osservi che l' applicazione $F^j : H^{1,2}_{\#}(Y) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\psi \mapsto F^j(\psi) = -\int_Y (a(y)e_j, D_y\psi)dy$$

è un funzionale lineare e continuo su $H^{1,2}_{\#}(Y)$. Pertanto essendo $\int_Y (\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i})dy = 0$, in virtù del Lemma (1), esiste ed è unica la soluzione del problema (23) per ogni $j = 1,\dots,n$. Allora la soluzione generale del problema (22) diventa

$$u_1(x,y) = \sum_{j=1}^n w^j(y)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} + \tilde{u}_1(x), \tag{24}$$

dove $\tilde{u}_1$ è una costante additiva (dipendente, quindi, dal parametro x).

Step 3: Studio del problema (16).

Passiamo ora al problema (16) dove consideriamo u_2 come l' incognita, essendo x un parametro. Ancora una volta, in virtù del Lemma (1), u_2 esiste se e solo se

$$\int_Y (\mathcal{A}_1 u_1 + \mathcal{A}_2 u_0)dy = \int_Y f(x)dy = |Y|f, \tag{25}$$

dove $|Y|$ indica la misura di Y. La condizione (25) è proprio l' equazione omogeneizzata che stiamo cercando. Si noti che

$$\int_Y \mathcal{A}_1 u_1 dy = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y a_{ik}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_k} dy$$

ed utilizzando la (24) si ha che

$$\int_Y \mathcal{A}_1 u_1 dy = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\int_Y \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(y) \frac{\partial w^j}{\partial y_k}(y) dy) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}$$

per cui la (25) si esprime come

$$-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} = f \text{ in } \Omega \,, \tag{26}$$

dove

$$b_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (a_{ij}(y) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(y) \frac{\partial w^j(y)}{\partial y_k}) dy \tag{27}$$

L' equazione (26) è l' equazione *omogeneizzata* mentre i coefficienti b_{ij} sono i *coefficienti omogeneizzati*. Infine per ottenere un problema ben posto per u_0 bisognerà soltanto imporre una condizione al contorno per u_0. Dalla (4) e dalla (6) si ricava che $u|_{\partial\Omega} = 0$ su $\partial\Omega$. Si osservi che questa relazione è formale ma, come vedremo, è rigorosamente giustificabile.

Osservazione. Possiamo riassumere le precedenti considerazioni e concludere che se si ipotizza uno sviluppo della forma (6), il primo termine è determinato come la soluzione dell' equazione (26) con la condizione al contorno $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ su $\partial\Omega$. Inoltre il procedimento formale (che verrà giustificato nel prossimo paragrafo) per calcolare i coefficienti omogeneizzati è il seguente:

i) si risolve la (23) sulla cella unitaria Y, per $j = 1, \ldots, n$;

ii) i coefficienti omogeneizzati b_{ij} sono dati dalla (27).

Nel prossimo paragrafo mostreremo che la successione (u_h) converge, in una appropriata topologia, alla funzione u_0 sopra assegnata.

3 Omogeneizzazione

Data $a \in \mathcal{M}_\#$, consideriamo il seguente problema di Dirichlet ai valori al contorno sul sottoinsieme aperto e limitato Ω di $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -div(a(\frac{x}{\varepsilon_h}) Du_h) = f \text{ in } \Omega \,, \\ u_h \in H_0^{1,2}(\Omega), \end{cases} \tag{28}$$

dove $f \in H^{-1,2}(\Omega)$ ed ε_h è una successione di numeri reali positivi convergenti a 0. Consideriamo inoltre il seguente problema *omogeneizzato*

$$\begin{cases} -div(bDu_0) = f \text{ in } \Omega \,, \\ u_0 \in H_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{29}$$

in cui la matrice $b = (b_{ij})$ è definita tramite la

$$(b_{ij}) = \int_Y (a_{ij}(y) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(y) \frac{\partial w^j(y)}{\partial y_k}) dy, \tag{30}$$

dove $w^j(y)$ è l' unica soluzione del problema *locale*

$$\begin{cases} \int_Y (a(y)(e_j + D_y w^j(y)), D_y v(y)) dy = 0 \text{ per ogni } v \in H^{1,2}_{\#}(Y) , \\ w^j \in H^{1,2}_{\#}(Y). \end{cases} \tag{31}$$

Allora è valido il seguente

Teorema 2 *Sia $a \in \mathcal{M}_{\#}$ ed (ε_h) una successione di numeri reali positivi convergenti a 0. Siano u_h ed u_0 rispettivamente le soluzioni dei problemi (28) e (29). Allora,*

$$u_h \to u_0 \text{ in } H^{1,2}_0(\Omega)\text{-debole} , \tag{32}$$

$$a(\frac{x}{\varepsilon_h}) Du_h \to bDu_0 \text{ in } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)\text{-debole} . \tag{33}$$

Per la prova di questo teorema si rimanda al testo di Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1] (Cap.1, Teorema 3.1). Vorrei invece sottolineare alcune caratteristiche di tale dimostrazione. Questa si basa su un metodo molto potente e generale conosciuto col nome di *metodo dell' energia* introdotto da Tartar. Il suo nome, dovuto al fatto che rappresenta la prova diversa di un importante teorema di convergenza di De Giorgi e Spagnolo (vedi [8],[9]), non è realmente adeguato, poiché il suo principale ingrediente è una accurata scelta di *funzioni test*. Più precisamente lo scopo fondamentale di questo metodo è di passare al limite nella formulazione variazionale del problema (4):

$$\int_\Omega a^h(x) \nabla u_h(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = \int_\Omega f(x) \phi(x) dx \text{ per ogni } \phi \in H^{1,2}_0(\Omega) . \tag{34}$$

Per una data funzione test ϕ non si può passare al limite nella (34), quando ε_h tende a zero, poiché il lato sinistro coinvolge il prodotto di due successioni debolmente convergenti (si può infatti mostrare che a^h converge, in $L^2(G)$-debole, alla funzione $\mathcal{M}(a) = \frac{1}{|Y|} \int_Y a(y) dy$). Allora l' idea principale del metodo è quella di sostituire la funzione test fissa ϕ con una successione di funzioni ϕ_h accuratamente costruita che permette di passare al limite grazie al fenomeno della *compattezza per compensazione* (vedi [10] e [11] per questa nozione). La giusta successione di funzioni test è

$$\phi_h(x) = \phi(x) + \varepsilon_h \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \tilde{w}^j(\frac{x}{\varepsilon_h}), \tag{35}$$

dove $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ e $\tilde{w}^j$ è la soluzione del problema *aggiunto* locale (cioè il problema (31) in cui la matrice a è sostituita dalla sua trasposta che indichiamo con a^*). Integrando per parti nella (34) ed utilizzando la equazione (23) sulla cella unitaria riusciamo a passare al limite nella (34) ottenendo la formulazione variazionale del problema omogeneizzato (29). In questo modo la convergenza del processo di omogeneizzazione è rigorosamente provata.

Sottolineo, ancora una volta, l' importanza rappresentata da una scelta accurata di *funzioni test*, perché, come vedremo successivamente, questa scelta sarà di fondamentale importanza per provare i risultati di convergenza nel procedimento di omogeneizzazione della classe di operatori tipo Kolmogorov-Fokker-Planck studiati. Infine è importante ricordare anche il seguente risultato, provato sempre in [1], grazie al quale il problema (29) risulta *ben posto*:

Proposizione 3 *Sia $a : \mathbb{R}^n \to M^{n\times n}$ una funzione di $\mathcal{M}_\#$. Sia b la matrice costante i cui coefficienti sono definiti dalla (1.34). Allora b soddisfa la stessa condizione di ellitticità di a, cioè,*

$$(b\xi,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \text{ per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n . \tag{36}$$

Adesso possiamo passare ad analizzare il nostro problema, ovvero lo studio di un modello di omogeneizzazione e di regolarizzazione per una classe di operatori tipo Kolmogorov-Fokker-Planck. Per la prova dei principali risultati si rimanda al lavoro [12].

4 Preliminari

Cominciamo col richiamare alcune proprietà della classe di operatori tipo Kolmogorov-Fokker-Planck che noi considereremo, dettagliatamente studiate nel lavoro già citato di Lanconelli e Polidoro [15]. Attualmente, lo studio di questa classe di operatori ha aperto un vasto campo di ricerca ricco di profonde e delicate problematiche. Un elenco non esaustivo di contributi importanti può essere dato dai lavori [13], [14], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26] e dai lavori citati nelle relative bibliografie. In particolare, nel lavoro di Lanconelli e Polidoro [15], non solo viene individuato un gruppo di traslazioni per cui la classe di operatori risulta invariante ma vengono sottolineate anche le condizioni da imporre (vedi ipotesi (H_2) sotto) affinché esista un gruppo di dilatazioni rispetto al quale l' operatore sia omogeneo di grado 2.

Focalizziamo quindi la nostra attenzione sulla classe di operatori di evoluzione del seguente tipo:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}(z)\partial_{x_j}) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{37}$$

dove $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $D = (\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_N})$ ed $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è l' usuale prodotto interno di $\mathbb{R}^N$. Sui coefficienti di L faremo le seguenti ipotesi:

(H_1) $(a_{ij}(z)) = (a_{ji}(z)) \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ per ogni $i,j = 1,\dots,q$ ed esiste $\mu > 0$ tale che

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \leq \mu\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2 \tag{38}$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $(\xi_1,\dots,\xi_q) \in \mathbb{R}^q$.

(H_2) B è una matrice costante $N \times N$ avente la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{39}$$

dove per ogni $i = 1,\dots,r$ B_i è una matrice $p_{i-1}\times p_i$ con rango p_i e $q = p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r$, $p_0 + p_1 + \dots + p_r = N$.

Come mostrato in [15], Proposizione A.1, le condizioni (H_1) ed (H_2) assicurano che l' operatore a coefficienti costanti, cioè dove $a_{ij} = a_{ji}$ sono termini costanti per ogni $i,j = 1,\dots,q$ ancora verificanti la (38)

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{40}$$

è *ipoellittico*. Infatti, posto

$$Y = \langle x, BD \rangle - \partial_t,$$

uno dei risultati principali di [15] consiste nel provare che la condizione (H_2) è equivalente alla seguente:

(H_2^*) rango Lie$(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_q}, Y)(z) = N + 1 \ \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}$ dove Lie$(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_q}, Y)$ indica l' algebra di Lie generata dai campi $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_q}, Y$.

Come è ben noto (vedi Hörmander [27]), la condizione (H_2^*) implica la ipoelliticità dell' operatore (40). Facciamo presente che d' ora in avanti ci riferiremo all' operatore con coefficienti costanti tramite la notazione L_0 in consistenza con la (40).

Sempre in [15] si verifica che

$$(x,t) \circ (y,\tau) = (y + E(\tau)x, t + \tau) \text{ per ogni } (x,t), (y,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1} \tag{41}$$

dove $E(\tau) = exp(-\tau B^T)$, allora $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ è un gruppo il cui elemento neutro è $(0,0)$; l' inverso di un elemento $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ è $(x,t)^{-1} = (-E(-t)x, -t)$. Ogni operatore L_0 è invariante per le traslazioni a sinistra di $\mathbb{R}^{N+1}$, cioè definite le traslazioni a sinistra come segue

$$l_{z'} : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}, \ l_{z'}(z) = z' \circ z \tag{42}$$

dove $z' \in \mathbb{R}^{N+1}$ è fissato, si verifica immediatamente che

$$L_0(u(z' \circ z)) = (L_0(u))(z' \circ z) \tag{43}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ con z' fissato.

Inoltre, sempre in [15], si mostra che la particolare forma della matrice B indicata nella (H_2) assicura l' esistenza di un gruppo di dilatazioni su $\mathbb{R}^{N+1}$, indicato con $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ rispetto al quale L_0 è omogeneo di grado 2 cioè:

$$L_0 \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L_0. \tag{44}$$

La dilatazione $D(\lambda)$, grazie all' ipotesi (H_2), è la seguente

$$D(\lambda) : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}, D(\lambda)(x,t) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \ldots, \lambda^{\alpha_N} x_N, \lambda^{\alpha_{N+1}} t) \tag{45}$$

dove $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{p_0} = 1$, $\alpha_{p_0+1} = \cdots = \alpha_{p_0+p_1} = 3, \ldots, \alpha_{p_0+\cdots+p_{r-1}+1} = \cdots = \alpha_N = 2r+1$ ed $\alpha_{N+1} = 2$. Possiamo quindi scrivere

$$D(\lambda) = diag(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \lambda^5 I_{p_2}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2) \tag{46}$$

dove I_k è la matrice identità $k \times k$. In forma più esplicita possiamo riesprimere la (44) nel modo seguente:

$$L_0(u(D(\lambda)z) = \lambda^2 (L_0 u)(D(\lambda)z). \tag{47}$$

Si tenga presente che esistono due proprietà molto importanti che collegano le dilatazioni $D(\lambda)$ e la legge di gruppo $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ associata ad L_0:

$$D(\lambda)(z' \circ z) = (D(\lambda)z') \circ (D(\lambda)z) \text{ per ogni } z, z' \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{48}$$

$$D(\lambda)(z^{-1}) = (D(\lambda)z)^{-1} \text{ per ogni } z \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{49}$$

Per finire, ricordiamo la seguente definizione di una norma in $\mathbb{R}^{N+1}$, omogenea di grado 1 rispetto al gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$, introdotta nel lavoro di M. Manfredini [21].

Definizione 4 *Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le costanti per cui la matrice $D(\lambda)$ si scrive nella forma (46). Se $z \in \mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\}$ poniamo $\| z \| = \rho$ se ρ è l' unica soluzione positiva dell' equazione*

$$\frac{x_1^2}{\rho^{2\alpha_1}} + \frac{x_2^2}{\rho^{2\alpha_2}} + \cdots + \frac{x_N^2}{\rho^{2\alpha_N}} + \frac{t^2}{\rho^4} = 1,$$

e $\| z \| = 0$ se $z = 0$.

Inoltre, ancora in [21], è verificata la seguente

Proposizione 5 *L' applicazione $z \mapsto \| z \|$ ha le seguenti proprietà:*

N_1) $\| D(\lambda)z \| = \lambda \| z \|$ *per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $\lambda > 0$;*

N_2) *L' insieme $\{z / \| z \| = 1\}$ è la sfera euclidea $\Sigma_{N+1} = \{(x,t)/|x|^2 + |t|^2 = 1\}$.*

N_3) *Esiste una costante $c_0 = c_0(B) > 0$ (dipende solo dalla matrice B) tale che per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ si ha*

$$\| z \circ \zeta \| \leq c_0(\| z \| + \| \zeta \|);$$

N_4) *Esiste una costante $c_1 = c_1(B) > 0$ tale che*

$$\frac{1}{c_1} \| z \| \leq \| z^{-1} \| \leq c_1 \| z \| \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}^{N+1};$$

N_5) *Per ogni compatto K di $\mathbb{R}^{N+1}$ esiste $c_2 = c_2(B, K) > 0$ tale che*

$$|z - \zeta| \leq c_2 \| \zeta^{-1} \circ z \| \quad \text{per ogni } z, \zeta \in K \text{ con } \| \zeta^{-1} \circ z \| \leq 1,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^{N+1}$.

Sempre seguendo [21], introduciamo una quasidistanza in $\mathbb{R}^{N+1}$ relativa alla norma $\| \|$:

Definizione 6 *Per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ poniamo*

$$d(z, \zeta) = \| \zeta^{-1} \circ z \|.$$

d è una quasidistanza (Cfr. [21]), nel senso che

$$d(z, \zeta) \geq 0, \; d(z, \zeta) = 0 \text{ se e solo se } z = \zeta,$$

ed esiste $c > 0$ tale che

$$d(z, \zeta) \leq c(d(z, z') + d(z', \zeta)) \quad \forall z, z', \zeta \in R^{N+1}.$$

Denoteremo con $B(z, r)$ l' insieme

$$B(z, r) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{N+1} / d(z, \zeta) < r\}. \tag{50}$$

Osservazione. La misura di Lebesgue μ in $\mathbb{R}^{N+1}$ è invariante per le traslazioni del gruppo $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$, in quanto $detE(t) = e^{t(TrB)} = 1$, ovvero la misura di Lebesgue rappresenta la misura di Haar del gruppo $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$. Inoltre risulta

$$\mu(B(z, r)) = \mu(B(0, r)) = r^{Q+2}\mu(B(0, 1)),$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $r > 0$ dove

$$Q + 2 = p_0 + 3p_1 + 5p_2 + \cdots + (2r + 1)p_r + 2.$$

Chiameremo *dimensione omogenea* di $\mathbb{R}^{N+1}$ il numero intero $Q + 2$.

5 Costruzione del *pavage intrinseco* associato al gruppo

Adesso, come in Biroli-Mosco-Tchou [28] e [29], costruiamo il *pavage* periodico associato al gruppo per il quale l' operatore L_0 è invariante. Denotiamo con $B = (-1,1)^N \times (0,1)$ il paralleletopo di $\mathbb{R}^{N+1}$. Sia $k_j \in \mathbb{Z}$ per ogni $j = 1, \ldots, N+1$ e $k = (2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_N, k_{N+1})$. Poniamo allora

$$\{B_k\} = \{k \circ B\} \tag{51}$$

ossia il *paralleletopo B traslato a sinistra di k* secondo la definizione (42).

Naturalmente non è ovvio a priori che $\{B_k\}$ definito in tal modo rappresenti un *pavage* di $\mathbb{R}^{N+1}$. Comunque, con semplici argomenti, si dimostra facilmente che $\{B_k\}$ è un *pavage* di $\mathbb{R}^{N+1}$ e la verifica diretta di tale affermazione è resa molto semplice se si esplicitano in maniera più evidente le caratteristiche delle *traslazioni a sinistra.*

Consideriamo adesso questo *pavage* dilatato di un piccolo parametro $\varepsilon > 0$, secondo le dilatazioni definite in (46):

$$\{B_k^\varepsilon\} = \{D(\varepsilon)B_k\} = \{(D(\varepsilon)k) \circ (D(\varepsilon)B)\}. \tag{52}$$

Anche in questo caso è facile osservare che $\{B_k^\varepsilon\}$ rappresenta una famiglia di *pavage* proprio grazie alla (48) la quale esprime la proprietà di commutazione tra dilatazioni e traslazioni. Sia ora v_0 una funzione definita in B; possiamo definire la funzione $\tilde{v}_0$ come l' estensione periodica di v_0 rispetto al *pavage* intrinseco $\{B_k\}$; infatti, come verificheremo tra non molto, posto $z' \in \mathbb{R}^{N+1}$ allora esiste un unico $k \in (2\mathbb{Z})^N \times \mathbb{Z}$ ed un unico $z \in B$ tali che

$$z' = k \circ z;$$

allora grazie alla proprietà delle traslazioni a sinistra

$$z = k^{-1} \circ z'$$

per cui definiamo

$$v(z') = \tilde{v}_0(z) = \tilde{v}_0(k^{-1} \circ z'). \tag{53}$$

La funzione $v(\cdot)$ sopra definita risulta pertanto periodica rispetto al pavage intrinseco $\{B_k\}$. Le funzioni per le quali è soddisfatta la (53) saranno denominate *funzioni B_k-periodiche.* Allo stesso modo, fissato $\varepsilon > 0$, se v_0 è una funzione definita in B^ε, definiamo la funzione $\tilde{v}_0^\varepsilon$ come l' estensione periodica di v_0 rispetto al *pavage* intrinseco $\{B_k^\varepsilon\}$; ancora una volta, infatti, se $z' \in \mathbb{R}^{N+1}$ allora esiste un unico $k \in (2\mathbb{Z})^N \times \mathbb{Z}$ ed un unico $z \in B^\varepsilon$ tali che

$$z' = (D(\varepsilon)(k)) \circ z$$

e quindi essendo

$$z = (D(\varepsilon)(k))^{-1} \circ z' = D(\varepsilon)(k^{-1}) \circ z',$$

definiamo come prima

$$v^\varepsilon(z') = \tilde{v}_0^\varepsilon(z) = \tilde{v}_0^\varepsilon(D(\varepsilon)(k^{-1}) \circ z'). \tag{54}$$

In sostanza, come nel caso classico, la funzione v *B_k-periodica* definita dalla (53), quando è calcolata nelle *variabili riscalate* ponendo

$$v^\varepsilon(z) = v(D(\varepsilon^{-1})z), \tag{55}$$

risulta essere *B_k^ε-periodica.*

In base alla definizione di funzione *B_k-periodica* è immediato verificare che risulta

$$L_0 v(\cdot) = L_0(\tilde{v}_0(k^{-1} \circ (\cdot))) = (L_0 \tilde{v}_0)(k^{-1} \circ (\cdot)) \tag{56}$$

ed allo stesso modo, per una funzione B_k^ε-*periodica*

$$L_0(v^\varepsilon(\cdot)) = L_0(\tilde{v}_0^\varepsilon(D(\varepsilon)(k)^{-1} \circ (\cdot))) = (L_0\tilde{v}_0^\varepsilon)(D(\varepsilon)(k^{-1}) \circ (\cdot)). \tag{57}$$

Adesso si osservi che se poniamo

$$\begin{aligned} \overline{x}_0 &= (x_1, \ldots, x_{p_0}) \text{ vettore di dim. } 1 \times p_0, \\ \overline{x}_1 &= (x_{p_0+1}, \ldots, x_{p_0+p_1}) \text{ vettore di dim. } 1 \times p_1, \\ &\vdots \\ \overline{x}_r &= (x_{p_0+p_1+\cdots+p_{r-1}+1}, \ldots, x_N) \text{ vettore di dim. } 1 \times p_r, \end{aligned} \tag{58}$$

e successivamente indichiamo con

$$\begin{aligned} D_{\overline{x}_0} &= (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{p_0}}) \\ D_{\overline{x}_1} &= (\partial_{x_{p_0+1}}, \ldots, \partial_{x_{p_0+p_1}}) \\ &\vdots \\ D_{\overline{x}_r} &= (\partial_{x_{p_0+p_1+\cdots+p_{r-1}+1}}, \ldots, \partial_{x_N}) \end{aligned} \tag{59}$$

i *gradienti* nelle *variabili* $\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_r$, allora possiamo riscrivere l' operatore nella forma seguente:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}(a_{ij}(z)\partial_{x_j}) = div_{\overline{x}_0}(a_{00}(z)D_{\overline{x}_0}) \tag{60}$$

dove $div_{\overline{x}_0}$ indica l' operatore di divergenza in $\mathbb{R}^q$ in quanto $q = p_0$ e con chiaro significato della notazione per a_{00}; inoltre si ha

$$\langle x, BD\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} x_i b_{ij}\partial_{x_j} = (0, \overline{x}_0 B_1, \ldots, \overline{x}_{r-1}B_r) \begin{pmatrix} D_{\overline{x}_0} \\ D_{\overline{x}_1} \\ \vdots \\ D_{\overline{x}_r} \end{pmatrix} =$$

$$= (\overline{x}_0 B_1)D_{\overline{x}_1} + (\overline{x}_1 B_2)D_{\overline{x}_2} + \cdots + (\overline{x}_{r-1}B_r)D_{\overline{x}_r}; \tag{61}$$

dalle precedenti si ricava che

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}(z)\partial_{x_j}) + \langle x, BD\rangle - \partial_t =$$

$$= div_{\overline{x}_0}(a_{00}(z)D_{\overline{x}_0}) + (\overline{x}_0 B_1)D_{\overline{x}_1} + (\overline{x}_1 B_2)D_{\overline{x}_2} + \ldots + (\overline{x}_{r-1}B_r)D_{\overline{x}_r} - \partial_t. \tag{62}$$

Con questa nuova notazione risulta interessante evidenziare meglio alcune caratteristiche delle traslazioni a sinistra rispetto a cui L_0 è invariante: consideriamo pertanto $k \in (2\mathbb{Z})^N \times \mathbb{Z}$, $k = (2k_1, \ldots, 2k_N, k_{N+1})$ e ricordiamo che il traslato a sinistra di $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ secondo il vettore k è

$$(\overline{k}_N, k_{N+1}) \circ (x, t) = (x + E(t)\overline{k}_N^T, t + k_{N+1}), \tag{63}$$

dove con $\overline{k}_N$ abbiamo indicato le prime N componenti del vettore $k \in (2\mathbb{Z})^N \times \mathbb{Z}$, mentre $\overline{k}_N^T$ è semplicemente il trasposto di $\overline{k}_N$; essendo B, per definizione, una matrice nihilpotente risulta che

$$E(t) = exp(-tB^T) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(-t)^k}{k!}(B^T)^k =$$

$$= I_N - tB^T + \frac{t^2}{2}(B^T)^2 + \cdots + (-1)^r \frac{t^r}{r!}(B^T)^r. \tag{64}$$

Con un po' di algebra noiosa necessaria per calcolare le potenze successive di B^T risulta infine:

$$x + E(t)\overline{k}_N = \{\overline{x}_0 + \overline{k}_0, \overline{x}_1 + \overline{k}_1 - t(\overline{k}_0 B_1), \overline{x}_2 + \overline{k}_2 - t(\overline{k}_1 B_2) + \frac{t^2}{2}\overline{k}_0(B_1 B_2), \ldots,$$

$$\ldots, \overline{x}_r + \overline{k}_r - t(\overline{k}_{r-1} B_r) + \frac{t^2}{2}\overline{k}_{r-2}(B_{r-1} B_r) + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^r}{r!} t^r \overline{k}_0 (B_1(B_2(\cdots(B_{r-1} B_r)\cdots)))\}, \tag{65}$$

dove

$$\overline{k}_N = (\overline{k}_0, \overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_r) = (2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_N)$$

in consistenza con la notazione introdotta tramite le (58).

6 Definizione del problema

Sia G un dominio limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$; in particolare supporremo G di tipo cilindrico, ossia $G = \Omega \times [0, T)$ dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. In G consideriamo un particolare problema di Dirichlet ai valori al contorno associato ad un operatore L^ε_{sub} (di cui tra poco chiariremo il significato) ed i cui coefficienti sono rapidamente oscillanti, o meglio sono B_k-*periodici* secondo la definizione (3.19).

Indichiamo con $S_{\mathcal{KFP}}$ l' insieme di tutte le funzioni $a : \mathbb{R}^{N+1} \to M^{q\times q}$, con $a(z) = (a_{ij}(z)) = (a_{ji}(z))$ per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $i, j = 1, \ldots, q$, tali che:

A_1) a_{ij} è B_k-*periodica* per ogni $i, j = 1, \ldots, q$;

A_2) $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$;

A_3) esiste una costante $\mu > 0$ tale che

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \le \mu\sum_{i=1}^{q}\xi_i^2$$

per quasi ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^q$.

Alle funzioni a che godono delle proprietà appena citate, associamo la seguente famiglia di operatori

$$L^\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a^\varepsilon(z)\partial_{x_j}) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{66}$$

dove abbiamo posto

$$a^\varepsilon(z) = a(D(\varepsilon^{-1})z) \tag{67}$$

con ε piccolo parametro positivo. Si osservi, in consistenza con la (55), che le funzioni a^ε_{ij} risultano B_k-*periodiche* in $\mathbb{R}^{N+1}$. A questo punto un approccio diretto alla formulazione debole del problema di Dirichlet associato all' operatore indicato nella (66) risulta immediatamente insoddisfacente, se condotto con i metodi standard della teoria degli operatori parabolici astratti largamente discussa da Lions.

Allora un modo per superare questa difficoltà, è quello di approssimare il problema originale con una sequenza di problemi variazionali *ben posti* che hanno soluzioni uniche. L' idea fondamentale di questo lavoro è stata quella di effettuare un particolare procedimento di regolarizzazione per la classe di operatori ultraparabolici studiata: l' approssimazione effettuata

l' abbiamo definita *regolarizzazione subellittica.* Definiamo allora il *regolarizzato subellittico* dell' operatore L^ε tramite la seguente

$$L^\varepsilon_{sub} = \varepsilon^2 Y^2 + L^\varepsilon \tag{68}$$

dove la parte regolarizzante è costituita dal termine $\varepsilon^2 Y^2$. Si osservi che la potenza con cui compare il parametro ε non è casuale ma strettamente legata, come vedremo, al procedimento di omogeneizzazione che applicheremo a questi operatori. In sostanza questa regolarizzazione ci consente di approssimare l' operatore originale, che è un operatore ultraparabolico, con una sequenza di operatori che godono di proprietà molto potenti ed interessanti.

Infatti la classe di operatori del tipo (68), per $\varepsilon > 0$ fissato, verifica stime subellittiche (si veda [27]), da cui il nome scelto per il procedimento di regolarizzazione; inoltre grazie alla (H_2^*), sempre per $\varepsilon > 0$ fissato, l' operatore L^ε_{sub} risulta coercivo, come verificheremo tra non molto, in virtù della disuguaglianza di Poincaré valida per campi vettoriali di tipo Hörmander (per questo risultato si rimanda al lavoro di Jerison [30]). Pertanto la classe di operatori definita nella (68) ci consente in modo agevole di lavorare nel contesto delle soluzioni deboli sfruttando, come vedremo, il lemma di Lax-Milgram grazie alla sopraccitata validità della disuguaglianza di Poincaré per campi vettoriali di tipo Hörmander.

Infine, sottolineiamo che la regolarizzazione effettuata è tale da preservare l' invarianza per traslazioni a sinistra definite nella (42) come enunciato nella seguente proposizione di verifica immediata

Proposizione 7 *Ogni operatore*

$$L_{0,sub} = \varepsilon^2 Y^2 + L_0,$$

dove L_0 rappresenta l' operatore a coefficienti costanti definito nella (40), è invariante per le traslazioni a sinistra di $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$, ovvero

$$L_{0,sub}(u(z' \circ z)) = (L_{0,sub}u)(z' \circ z)$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $z' \in \mathbb{R}^{N+1}$ fissato.

Adesso siamo pronti alla formulazione esatta del problema che intendiamo affrontare: per un fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo il seguente problema di Dirichlet ai valori al contorno su G

$$\begin{cases} \varepsilon^2 Y^2 u^\varepsilon + L^\varepsilon u^\varepsilon &= f \text{ in } G\,, \\ u^\varepsilon|_{\partial G} &= 0 \text{ su } \partial G, \end{cases} \tag{69}$$

dove f è, al solito, una funzione assegnata su G; in particolare, nell' ambito della teoria dell' omogeneizzazione, ci interessa stabilire il comportamento di u^ε per ε che tende a zero. Prima di passare alla formulazione debole del problema (69) abbiamo bisogno di specificare in quali spazi funzionali andiamo a cercare le nostre soluzioni deboli. Allora denotiamo con $\mathcal{H}(G)$ lo spazio di Sobolev degenere associato ai campi vettoriali indicati nella (H_2^*) cioè

$$\mathcal{H}(G) = \{u \in L^2(G) / u_{x_j} \in L^2(G)\ \forall j = 1, \ldots, q, Yu \in L^2(G)\}, \tag{70}$$

fornito della norma naturale

$$\| u \|^2_{\mathcal{H}(G)} = \| u \|^2_{L^2(G)} + \| D_{\bar{x}_0} u \|^2_{L^2(G)} + \| Yu \|^2_{L^2(G)}; \tag{71}$$

facciamo presente che in questi spazi vale un teorema tipo Meyers-Serrin, cioè

$$C^\infty(G) \cap \mathcal{H}(G) \text{ è denso in } \mathcal{H}(G)$$

(si vedano [31], [32], [33]). Pertanto è naturale denotare con $\mathcal{H}_0(G)$ la chiusura di $C_0^\infty(G)$ in $\mathcal{H}(G)$. Di fondamentale importanza risulta poi il seguente teorema che discende da quello più generale provato in [30] riguardante, appunto, campi vettoriali che soddisfano la condizione di Hörmander

Teorema 8 *Esiste una costante geometrica $c > 0$ tale che*

$$\int_{\mathcal{O}} |u|^2 dz \leq c\Big(\int_{\mathcal{O}} |D_{\bar{x}_0} u|^2 dz + \int_{\mathcal{O}} |Yu|^2 dz\Big) \tag{72}$$

per ogni $u \in \mathcal{H}_0(\mathcal{O})$ e per ogni aperto limitato $\mathcal{O}$ di $\mathbb{R}^{N+1}$.

In sostanza, il teorema appena ricordato asserisce la validità della disuguaglianza di Poincaré per i nostri campi vettoriali. In particolare, segue che la norma naturale definita nella (71) e la seguente norma

$$\| u \|^2_{\mathcal{H}_0(\mathcal{O})} = \| D_{\bar{x}_0} u \|^2_{L^2(\mathcal{O})} + \| Yu \|^2_{L^2(\mathcal{O})}, \tag{73}$$

sono norme equivalenti nello spazio $\mathcal{H}_0(\mathcal{O})$. Per cui d' ora in avanti, salvo diversa indicazione, quando ci riferiremo allo spazio $\mathcal{H}_0(\mathcal{O})$ lo supporremo sempre fornito della norma $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_0(\mathcal{O})}$ definita nella (73). Possiamo ora formulare il pricipale risultato riguardante il problema di Dirichlet per l' operatore L^ε_{sub} in G.

Teorema 9 *Sia $f \in L^2(G)$. Allora esiste una ed una sola $u^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G)$ che risolve il problema di Dirichlet per $\varepsilon > 0$ fissato*

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} L^\varepsilon_{sub} u^\varepsilon = f \text{ in } G, \\ u|_{\partial G} = 0 \text{ su } \partial G \end{cases}$$

nel senso che

$$\begin{cases} \mathcal{M}^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = -\int_G f(z) v(z) dz \text{ per ogni } v \in \mathcal{H}_0(G), \\ u^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G) \end{cases} \tag{74}$$

dove $\mathcal{M}^\varepsilon : \mathcal{H}_0(G) \times \mathcal{H}_0(G) \to R$ è la seguente forma bilineare

$$\mathcal{M}^\varepsilon(u, v) = \int_G (a^\varepsilon D_{\bar{x}_0} u, D_{\bar{x}_0} v) dz + \varepsilon^2 \int_G Yu Yv dz + \int_G u(Yv) dz \tag{75}$$

La verifica è immediata tramite l' applicazione del lemma di Lax-Milgram.
Riconsideriamo il problema (69) nella seguente forma

$$\begin{cases} L^\varepsilon_{sub} u^\varepsilon = f \text{ in } G, \\ u^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G) \end{cases} \tag{76}$$

dove supponiamo $f \in L^2(G)$. Consideriamo adesso la successione (u^ε) di soluzioni del problema (76) al variare del parametro ε. È facile verificare che

$$\varepsilon^2 \| Yu^\varepsilon \|^2_{L^2(G)} + \frac{1}{\mu} \| D_{\bar{x}_0} u^\varepsilon \|^2_{L^2(G)} \leq \| f \|_{L^2(G)} \| u^\varepsilon \|_{L^2(G)} \tag{77}$$

da cui

$$c_\varepsilon \| u^\varepsilon \|^2_{\mathcal{H}_0(G)} \leq \| f \|_{L^2(G)} \| u^\varepsilon \|_{\mathcal{H}_0(G)}, \tag{78}$$

dove c_ε è una costante che dipende dal parametro ε. Il passo successivo è stato quello di cercare stime a priori su u^ε, indipendenti dal parametro ε, in uno spazio funzionale più grande dello spazio $\mathcal{H}_0(G)$ e sicuramente meno regolare di questo, ma comunque più congeniale ai nostri scopi. Definiamo allora

$$\mathcal{H}^{\bar{x}_0}(G) = \{u \in L^2(G) / u_{x_j} \in L^2(G) \; \forall \, j = 1, \ldots, q\} \tag{79}$$

fornito della norma

$$\| u \|^2_{\mathcal{H}^{\bar{x}_0}(G)} = \| D_{\bar{x}_0} u \|_{L^2(G)} + \| u \|^2_{L^2(G)} \tag{80}$$

e si osservi che

$$C^\infty(G) \cap \mathcal{H}^{\overline{x}_0}(G) \text{ è denso in } \mathcal{H}^{\overline{x}_0}(G)$$

sempre per la validità di un teorema tipo Meyers-Serrin in questi spazi (vedi [31], [32], [33]); quindi è naturale definire con $\mathcal{H}_0^{\overline{x}_0}(G)$ la chiusura di $C_0^\infty(G)$ in $\mathcal{H}^{\overline{x}_0}(G)$.

Con argomenti standard di tipo classico si arriva facilmente a verificare la validità delle seguenti

$$\| u^\varepsilon \|_{\mathcal{H}_0^{\overline{x}_0}(G)} \leq c_1, \tag{81}$$

$$\| u^\varepsilon \|_{L^2(G)} \leq c_2 \tag{82}$$

ed

$$\varepsilon \| Y u^\varepsilon \|_{L^2(G)} \leq c_3 \tag{83}$$

dove c_1, c_2, c_3 sono delle costanti reali positive che non dipendono dal parametro ε. Grazie alla (81) ricaviamo che è possibile estrarre una sottosuccessione, ancora denominata allo stesso modo, tale che per $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } \mathcal{H}_0^{\overline{x}_0}(G) \text{ - debole }. \tag{84}$$

7 Costruzione dell' operatore omogeneizzato

Introduciamo in questo paragrafo il metodo dello sviluppo asintotico di cui abbiamo già discusso in precedenza. Al solito, cerchiamo uno sviluppo asintotico per $u^\varepsilon(z)$, come funzione del parametro ε: ipotizziamo in modo del tutto euristico che u^ε ammetta uno sviluppo in due scale della forma

$$u^\varepsilon(z) = u_0(z, D(\varepsilon^{-1})z) + \varepsilon^1 u_1(z, D(\varepsilon^{-1})z) + \varepsilon^2 u_2(z, D(\varepsilon^{-1})z) + \cdots, \tag{85}$$

dove le funzioni $u_i(z, \zeta)$ sono funzioni B_k-*periodiche* nella variabile ζ (che chiameremo variabile *microscopica*) per ogni $z \in G$ (che chiameremo variabile *macroscopica*). Quindi noi postuliamo l' esistenza di funzioni regolari $u_i(z, \zeta)$ definite in $G \times \mathbb{R}^{N+1}$, indipendenti da ε, B_k-*periodiche* nella variabile ζ e tali che per $\zeta = (D(\varepsilon^{-1})z)$ il lato destro della (85) sia uno sviluppo asintotico di $u^\varepsilon(z)$.

Facciamo notare che quando consideriamo le funzioni

$$u_i(z, (D(\varepsilon^{-1})z)) \tag{86}$$

queste risultano essere invece B_k^t-*periodiche* nella variabile microscopica. Esattamente come nel caso classico, si procede inserendo la (85) nella (69) ed identificando le potenze successive di ε; si noti che è proprio in questa identificazione di potenze che gioca un ruolo fondamentale l' esponente con cui appare il parametro ε nella parte regolarizante della (68). Anzitutto ricordiamo che in consistenza con la notazione (58) possiamo scrivere

$$(D(\varepsilon)^{-1}z) = (\varepsilon^{-1}\overline{x}_0, \varepsilon^{-3}\overline{x}_1, \varepsilon^{-5}\overline{x}_2, \ldots, \varepsilon^{-(2r+1)}\overline{x}_r, \varepsilon^{-2}t) =$$

$$= (\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_r, \tau). \tag{87}$$

Pertanto quando poniamo $\zeta = (D(\varepsilon^{-1})z)$ intendiamo, in base alla (87),

$$\zeta = (\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_r, \tau) = (\xi, \tau). \tag{88}$$

Assegnata poi una funzione regolare $\Phi(z, \zeta)$ di due variabili, definiamo la funzione

$$\Phi^\varepsilon(z) = \Phi(z, D(\varepsilon^{-1})z) \tag{89}$$

ed osserviamo che

$$D_{\bar{x}_0}\Phi^\varepsilon(z) = (D_{\bar{x}_0}\Phi + \frac{1}{\varepsilon}D_{\bar{\xi}_0}\Phi)(z, D(\varepsilon^{-1})z)$$

$$D_{\bar{x}_1}\Phi^\varepsilon(z) = (D_{\bar{x}_1}\Phi + \frac{1}{\varepsilon^2}D_{\bar{\xi}_1}\Phi)(z, D(\varepsilon^{-1})z)$$

$$D_{\bar{x}_2}\Phi^\varepsilon(z) = (D_{\bar{x}_2}\Phi + \frac{1}{\varepsilon^5}D_{\bar{\xi}_2}\Phi)(z, D(\varepsilon^{-1})z)$$

$$\vdots$$

$$D_{\bar{x}_r}\Phi^\varepsilon(z) = (D_{\bar{x}_r}\Phi + \frac{1}{\varepsilon^{2r+1}}D_{\bar{\xi}_r}\Phi)(z, D(\varepsilon^{-1})z)$$

$$\partial_t\Phi^\varepsilon(z) = (\partial_t\Phi + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\tau\Phi)(z, D(\varepsilon^{-1})z).$$

Facciamo notare che in questo contesto stiamo considerando le variabili z e ζ indipendenti, per cui i corrispondenti operatori di derivazione commutano tra di loro. Adesso, con questo in mente, analizzando il singolo comportamento dei tre termini che compongono l' operatore L^ε_{sub} quando sono applicati a funzioni del tipo (89), otteniamo che:

$$L^\varepsilon_{sub}\Phi^\varepsilon = [(\varepsilon^{-2}(\mathcal{L}_0 + Y^2_{\xi,\tau}) + \varepsilon^{-1}(\mathcal{L}_1) + \varepsilon^0(\mathcal{L}_2 + 2Y_{x,t}Y_{\xi,\tau}))\Phi](z, D(\varepsilon^{-1})z) \tag{90}$$

dove per $\zeta = (z, D(\varepsilon^{-1})z)$ gli operatori sopra indicati sono i seguenti

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{\xi_i}(a_{ij}(\zeta)\partial_{\xi_j}) + \langle \xi, BD_\xi\rangle - \partial_\tau \tag{91}$$

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}(\zeta)\partial_{\xi_j}) + \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{\xi_i}(a_{ij}(\zeta)\partial_{x_j}) \tag{92}$$

$$\mathcal{L}_2 = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}(\zeta)\partial_{x_j}) + \langle x, BD_x\rangle - \partial_t\ . \tag{93}$$

Pertanto utilizzando la (85) e la (90), l' equazione (69) è soddisfatta, sotto l' ipotesi che la matrice a e le funzioni $u_i(z,\zeta)$ siano sufficientemente regolari, se

$$(\mathcal{L}_0u_0 + Y^2_{\xi,\tau}u_0)(z, D(\varepsilon^{-1})z) = 0 \ \text{ in } G\ , \tag{94}$$

$$(\mathcal{L}_0u_1 + Y^2_{\xi,\tau}u_1 + \mathcal{L}_1u_0)(z, D(\varepsilon^{-1})z) = 0 \ \text{ in } G\ , \tag{95}$$

$$(\mathcal{L}_0u_2 + Y^2_{\xi,\tau}u_2 + \mathcal{L}_1u_1 + \mathcal{L}_2u_0 + 2Y_{x,t}Y_{\xi,\tau}u_0)(z, D(\varepsilon^{-1})z) = f \ \text{ in } G\ . \tag{96}$$

Mostriamo adesso come dalle (94), (95) e (96) si possa costruire l' operatore omogeneizzato. Procedendo come nel caso classico, determiniamo le funzioni u_i risolvendo i problemi seguenti nei quali consideriamo z come un parametro fissato e nei quali le condizioni di B_k-periodicità svolgono il ruolo di condizioni al contorno:

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0u_0 + Y^2_{\xi,\tau}u_0)(z,\cdot) = 0 \ \text{ in } B\ , \\ u_0(z,\cdot)\ B_k\text{-periodica}\ ; \end{cases} \tag{97}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0u_1 + Y^2_{\xi,\tau}u_1)(z,\cdot) = -(\mathcal{L}_1u_0)(z,\cdot) \ \text{ in } B\ , \\ u_1(z,\cdot)\ B_k\text{-periodica}\ ; \end{cases} \tag{98}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0u_2 + Y^2_{\xi,\tau}u_2)(z,\cdot) = f(z) - (\mathcal{L}_2u_0 + 2Y_{\xi,\tau}Y_{x,t}u_0 + \mathcal{L}_1u_1)(z,\cdot) \text{ in } B\ , \\ u_2(z,\cdot)\ B_k\text{-periodica}\ . \end{cases} \tag{99}$$

Consideriamo questi problemi nel contesto delle soluzioni deboli. Denotiamo allora con $L^p_{per}(B)$ la chiusura dello spazio $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^{N+1})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^p(B)}$, dove

$$C^\infty_{per}(\mathbb{R}^{N+1}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}),\ u\ B_k\text{-periodica}\}. \tag{100}$$

Allo stesso modo definiamo $\mathcal{H}_{per}(B)$ la chiusura dello spazio $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^{N+1})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}(B)}$ che è una norma su $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^{N+1})$ proprio a causa della periodicità. Inoltre indichiamo con $\mathcal{H}_\#(B)$ il sottoinsieme di $\mathcal{H}_{per}(B)$ di tutte le funzioni con valore medio nullo su B, ovvero

$$\mathcal{H}_\#(B) = \{u \in \mathcal{H}_{per}(B)/\frac{1}{|B|}\int_B u(\zeta)d\zeta = 0\}. \tag{101}$$

A questo punto possiamo introdurre un risultato molto importante di esistenza di soluzioni per un problema ai valori al contorno sulla cella di base B associato ad operatori subellittici.

Lemma 10 *Sia $F \in L^2_{per}(B)$. Allora il problema*

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\phi,\psi) = -\int_B F\psi d\zeta \ \ \textit{per ogni } \psi \in \mathcal{H}_{per}(B)\ , \\ \phi \in \mathcal{H}_\#(B), \end{cases} \tag{102}$$

dove

$$\mathcal{A}(\phi,\psi) : \mathcal{H}_{per}(B) \times \mathcal{H}_{per}(B) \to \mathbb{R}$$

è la forma bilineare definita da

$$\mathcal{A}(\phi,\psi) = \sum_{i,j=1}^{q}\int_B a_{ij}(\zeta)D_{\xi_j}\phi D_{\xi_i}\psi d\zeta + \int_B Y_{\xi,\tau}\phi Y_{\xi,\tau}\psi d\zeta + \int_B \phi(Y_{\xi,\tau}\psi)d\zeta, \tag{103}$$

ammette una unica soluzione se e solo se

$$\int_B F(\zeta)d\zeta = 0. \tag{104}$$

Vorrei solo sottolineare a tal proposito l' importanza delle seguenti relazioni

$$\int_B \partial_{\xi_j} u(\zeta)d\zeta = 0 \ \text{ per ogni } j = 1,\dots,q \text{ e per ogni } u \in \mathcal{H}_{per}(B)\ , \tag{105}$$

e

$$\int_B Y_{\xi,\tau}u(\zeta)d\zeta = 0 \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{H}_{per}(B) \tag{106}$$

che non solo ci consentono di *passare* alla formulazione debole dei problemi (97), (98) e (99) grazie alla validità di alcune formule di integrazioni per parti ma, come vedremo, risultano fodamentali anche per varie considerazioni relative allo studio dei problemi appena citati sulla cella fondamentale.
Consideriamo adesso il seguente lemma, caratterizzante le proprietà della estensione periodica rispetto al pavage intrinseco $\{B_k\}$ della soluzione del problema (102):

Lemma 11 *Per $F \in L^2(B)$, a media nulla su B, si consideri l' unica soluzione debole $\phi \in \mathcal{H}_\#(B)$ del problema (102); allora l' estensione periodica $\tilde\phi$ di ϕ rispetto al pavage intrinseco $\{B_k\}$ è una soluzione, nel senso delle distribuzioni, del problema*

$$\mathcal{L}_0\tilde\phi + Y^2_{\xi,\tau}\tilde\phi = \tilde F \quad \textit{in } \mathbb{R}^{N+1}\ , \tag{107}$$

dove $\tilde F$ rappresenta l' estensione periodica, rispetto al pavage $\{B_k\}$, di F.

Concludiamo, per finire, con un lemma caratterizzante le proprietà dell' operatore $\mathcal{L}_0+Y^2_{\xi,\tau}$ sotto ipotesi di maggiore regolarità sui coefficienti.

Lemma 12 *Supponiamo che l' ipotesi* (A_2) *sui coefficienti* $a_{ij}(z) \in S_{\mathcal{KFP}}$ *sia sostituita da quella più forte* $a_{ij}(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, *ferme restando le altre ipotesi. Allora l' operatore*

$$\mathcal{L}_0 + Y^2_{\xi,\tau} \tag{108}$$

è ipoellittico.

Dimostrazione. L' operatore è ipoellittico come si può vedere utilizzando le tecniche di Kohn-Radkevic (vedi [34], [35]). Per una formulazione esplicita del risultato si veda M. E. Taylor [36], cap. 15, Teorema 1.2 .

Adesso, procedendo formalmente come nel caso classico, grazie al Lemma 10 possiamo determinare le soluzioni dei problemi (97), (98) e (99).

Studio del problema (97).
Il problema (97) può essere formulato in modo debole come segue:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u_0,\psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{per}(B), \\ u_0(z,\cdot) \in \mathcal{H}_{per}(B) \end{cases} \tag{109}$$

dove $\mathcal{A}$ è la forma bilineare introdotta nella (103). Ricordiamo che in questo contesto z gioca il ruolo di un parametro. Allora grazie al Lemma 10 concludiamo che $u_0(z,\cdot)$ è determinata dall' identità integrale presente nel problema (109) a meno di una costante. Dalla stessa identità, prendendo $\psi = u_0(z,\cdot)$ e sfruttando la coercività della forma bilineare $\mathcal{A}$, si ricava che

$$\gamma \parallel u_0(z,\cdot) \parallel^2_{\mathcal{H}_{per}(B)} \leq \mathcal{A}(u_0,u_0) = 0 \tag{110}$$

ovvero che $u_0(z,\cdot)$=costante, quindi

$$u_0(z,\cdot) = u_0(z) \tag{111}$$

Studio del problema (98).
Grazie alla (111) la formulazione debole del problema (98) diventa: trovare $u_1(z,\cdot) \in \mathcal{H}_{per}(B)$ tale che

$$\mathcal{A}(u_1,\psi) = -\sum_{i,j=1}^{q} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_B a_{ij} D_{\xi_i}\psi d\zeta \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{per}(B). \tag{112}$$

Allora consideriamo per $j = 1,\dots,q$ il problema

$$\begin{cases} \mathcal{A}(w^j,\psi) = -\int_B (a(\zeta)e_j, D_{\bar{\xi}_0}\psi(\zeta))d\zeta \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{\#}(B), \\ w^j \in \mathcal{H}_{\#}(B). \end{cases} \tag{113}$$

Osservato che l' applicazione $F^j : \mathcal{H}_{\#}(B) \to \mathbb{R}$ definita tramite la seguente

$$\psi \to F^j(\psi) = -\int_B (a(\zeta)e_j, D_{\bar{\xi}_0}\psi(\zeta))d\zeta$$

è un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{H}_{\#}(B)$ e ricordato che in virtù della relazione (105) risulta

$$\sum_{i=1}^{q} \int_B (\frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_i})d\zeta = 0,$$

sempre dal Lemma 10 discende che esiste ed è unica la soluzione del problema (113) per ogni $j = 1, \ldots, q$. Quindi una soluzione generale del problema (112) è

$$u_1(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{q} w^j(\zeta)\frac{\partial u_0(z)}{\partial x_j} + c_1(z) \tag{114}$$

dove $c_1(z)$ è una costante additiva dipendente, quindi, dal parametro z.

Studio del problema (99).

Nel problema (99) chiaramente l' incognita è rappresentata dalla funzione u_2 essendo, al solito, z un parametro. Pertanto grazie al Lemma 10, u_2 esiste ed è unica se e solo se

$$\int_B (\mathcal{L}_2 u_0 + \mathcal{L}_1 u_1)d\zeta = \int_B f(z)d\zeta = |B|f(z), \tag{115}$$

dove $|B|$ indica la misura di B; si noti che nella precedente abbiamo sfruttato il fatto che

$$Y_{x,t}Y_{\xi,\tau}u_0(z) = Y_{\xi,\tau}Y_{x,t}u_0(z) = 0$$

in quanto i due campi $Y_{x,t}$ e $Y_{\xi,\tau}$, rispettivamente nelle variabili macroscopiche e microscopiche, commutano tra di loro. La condizione (115) rappresenta, in analogia col caso classico, proprio l' equazione omogeneizzata che stiamo cercando: infatti osservato che

$$\mathcal{L}_1 u_1 = \sum_{i,k=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}(\zeta)\frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}) + \sum_{i,k=1}^{q} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(a_{ik}(\zeta)\frac{\partial u_1}{\partial x_k}),$$

si ha, utilizzando la (114) e la proprietà (105)

$$\int_B (\mathcal{L}_1 u_1)d\zeta = \sum_{i,j=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\int_B \sum_{k=1}^{q} a_{ik}(\zeta)\frac{\partial w^j}{\partial \xi_k}(\zeta)d\zeta\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{q}\Big(\int_B \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}(\zeta)w^j(\zeta)\Big)d\zeta\Big)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j x_k} + \sum_{i,j=1}^{q}\Big(\int_B \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}(\zeta)\Big)d\zeta\Big)\frac{\partial c_1}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{q}\Big(\int_B \sum_{k=1}^{q} a_{ik}(\zeta)\frac{\partial w^j}{\partial \xi_k}(\zeta)d\zeta\Big)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i x_j}, \tag{116}$$

per cui la (115) si esprime come

$$\sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}^{hom}\partial_{x_j}u_0) + Yu_0 = f \quad \text{in } G, \tag{117}$$

dove per $i, j = 1, \ldots, q$

$$a_{ij}^{hom} = \frac{1}{|B|}\int_B (a_{ij}(\zeta) + \sum_{k=1}^{q} a_{ik}(\zeta)\frac{\partial w^j(\zeta)}{\partial \xi_k})d\zeta. \tag{118}$$

L' equazione (117) è l' equazione omogeneizzata mentre i coefficienti a_{ij}^{hom} sono i coefficienti omogeneizzati. A questo punto un po' di considerazioni sono necessarie. In sostanza il procedimento di regolarizzazione subellittica presenta un duplice vantaggio: anzitutto, come abbiamo visto in precedenza, ci consente di lavorare nel contesto delle soluzioni deboli sfruttando a tal proposito il Teorema 9 e per i problemi ai valori al contorno sulla cella di base B associati ad operatori subellittici il Lemma 10; inoltre, ipotizzando uno sviluppo della forma (85), ci consente (per il momento formalmente) di costruire l' equazione omogeneizzata (117), la cui forma è, però, quella di una equazione di Kolmogorov-Fokker-Planck. Infine è

immediato verificare che, nelle nostre ipotesi, la matrice dei coefficienti omogeneizzati risulta simmetrica.
Nel prossimo paragrafo mostreremo un particolare metodo di regolarizzazione per funzioni $u \in L^2_{per}(B)$ che preserva la periodicità rispetto al pavage intrinseco $\{B_k\}$. Sfruttando questo metodo per approssimare i coefficienti degli operatori di interesse con coefficienti regolari, vedremo che sarà possibile costruire una classe di funzioni test di fondamentale importanza per la prova del risultato di convergenza.

8 Approssimazione con coefficienti regolari e costruzione della classe di funzioni test

Intendiamo ora approssimare i coefficienti del nostro operatore con coefficienti regolari che rispettino la periodicità rispetto al pavage intrinseco. È naturale quindi utilizzare convoluzioni che rispettino la struttura di gruppo con dilatazioni. Un simile approccio al problema della regolarizzazione dei coefficienti, per equazioni tipo Kolmogorov-Fokker-Planck, appare anche in [25], [16], [26], in forma leggermente diversa, essendo formulato in una diversa prospettiva.
Pertanto, sia ω una funzione non negativa, a valori reali appartenente a $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ ed avente le seguenti proprietà:
1) $\omega(z) = 0$ se $|||z||| \geq 1$, dove con $||| \cdot |||$ ci riferiamo alla norma introdotta nella Definizione 4;
2) $\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \omega(z)dz = 1$.
Adesso sia $\eta > 0$: allora la funzione

$$\omega_\eta(z) = \omega(D(\eta^{-1})z)\eta^{-(Q+2)} \tag{119}$$

è non negativa, appartiene a $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ e soddisfa le seguenti:
a) $\omega_\eta(z) = 0$ se $|||z||| \geq \eta$, e
b) $\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \omega_\eta(z)dz = 1$;
la proprietà (*a*) discende, in particolare, dalla (N_1) della Proposizione 5. Sia ora $u(z)$ una funzione B_k-*periodica*; supponiamo inoltre che $u(z) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ e definiamo $\mathcal{K}$-*regolarizzazione* di $u(z)$ la seguente funzione

$$u_\eta(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} u(z')\omega_\eta((z')^{-1} \circ z)dz' \; ; \tag{120}$$

Osserviamo che, nelle nostre ipotesi, tale definizione è ben posta; infatti essendo $\omega_\eta(z)$ a supporto compatto si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} |u(z')\omega_\eta((z')^{-1} \circ z)|dz' \leq sup|\omega_\eta| \int_{|||(z')^{-1}oz|||\leq\eta} |u(z')|dz' \leq$$

$$\leq \eta^{-(Q+2)} \int_{|||(z')^{-1}oz|||\leq\eta} |u(z')|dz' \tag{121}$$

e quindi grazie alla disuguaglianza di Hölder risulta

$$\eta^{-(Q+2)} \int_{B(z,\eta)} |u(z')|dz' \leq \eta^{-(Q+2)}\{\mu(B(z,\eta))\}^{\frac{1}{2}}(\int_{B(z,\eta)} |u(z')|^2dz')^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \eta^{-(Q+2)}\eta^{\frac{Q+2}{2}}\{\mu(B(0,1))\}^{\frac{1}{2}}(\int_{B(z,\eta)} |u(z')|^2dz')^{\frac{1}{2}}. \tag{122}$$

dove con $B(z,\eta)$ intendiamo l' insieme indicato nella (50).
Le proprietà della funzione $u_\eta(z)$ sono riassunte dal seguente

Teorema 13 *Sia u_η la funzione definita dalla (120) con $u(z)$ e $\omega_\eta(z)$ che soddisfano le ipotesi precedentemente fatte; allora sono verificate le seguenti:*
M_1) $u_\eta(z)$ *è* B_k*-periodica,*
M_2) $u_\eta(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$,
M_3) $u_\eta(z) \in L^2_{per}(B)$, $\| u_\eta(z) \|_{L^2(K)} \leq \| u(z) \|_{L^2(K)}$ *e*
$\lim_{\eta\to 0} \| u_\eta(z) - u(z) \|_{L^2(K)} = 0$ *per ogni compatto* $K \in \mathbb{R}^{N+1}$.

La (M_1) discende facilmente dalla definizione di B_k-periodicità, mentre per la (M_2) ed (M_3) si procede come nella teoria dei mollificatori classici (vedi, ad esempio, Adams [26], Teorema 2.13).

Adesso consideriamo il *$\mathcal{K}$-regolarizzato*, secondo la definizione (120), dei coefficienti $a_{ij}(z)$

$$a^\eta(z) = (a^\eta_{ij}(z)) = (\int_{\mathbb{R}^{N+1}} a_{ij}(z')\omega_\eta((z')^{-1} \circ z)dz') \tag{123}$$

dove $a_{ij}(z)$, per $i, j = 1, ..., q$, soddisfano le ipotesi (A_1), (A_2) ed (A_3);
in particolare essendo $a_{ij}(z) \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, deduciamo facilmente che $a_{ij}(z) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$.
Pertanto dal Teorema 13 ricaviamo che i coefficienti *$\mathcal{K}$-regolarizzati* soddisfano le seguenti proprietà:
A'_1) $a^\eta_{ij}(z)$ è *B_k-periodica* per ogni $i, j = 1, \ldots, q$;
A'_2) $a^\eta_{ij}(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, $a^\eta_{ij}(z) \in L^2_{per}(B)$, $\lim_{\eta\to 0} \| a^\eta_{ij}(z) - a_{ij}(z) \|_{L^2(K)}$ per ogni compatto K di $\mathbb{R}^{N+1}$, quindi $\lim_{\eta\to 0} \| a^\eta_{ij}(z) - a_{ij}(z) \|_{L^2_{per}(B)} = 0$ per ogni $i, j = 1, \ldots, q$;
A'_3) esiste una costante $\mu > 0$ (la stessa introdotta nella (A_3)) tale che

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^q \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^q a^\eta_{ij}(z)\xi_i\xi_j \leq \mu\sum_{i=1}^q \xi_i^2$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per $(\xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathbb{R}^q$ (si osservi che in questa situazione le variabili ξ_i non rappresentano variabili microscopiche periodiche ma le componenti di un generico punto di $\mathbb{R}^q$).
Naturalmente lo stesso procedimento di regolarizzazione può essere applicato, con una lieve modifica, anche a funzioni B_k^ε-periodiche; posto infatti per $\varepsilon > 0$ fissato

$$a^\varepsilon_\eta(z) = (\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \omega^\varepsilon_\eta((z')^{-1} \circ z)a^\varepsilon_{ij}(z')dz') =$$

$$= (\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \omega_\eta((D(\varepsilon^{-1})z')^{-1} \circ D(\varepsilon^{-1})z)a_{ij}(D(\varepsilon^{-1})z')dz') \tag{124}$$

è immediato verificare la validità di proprietà analoghe a quelle appena enumerate per i coefficienti $a^\eta_{ij}(z)$ tenendo però presente che adesso i coefficienti della matrice $a^\varepsilon_\eta(z)$ risultano periodici rispetto al pavage intrinseco $\{B^\varepsilon_k\}$.

Analizziamo adesso il comportamento della soluzione del problema (P^ε), per $\varepsilon > 0$ fissato, con coefficienti *$\mathcal{K}$-regolarizzati* secondo lo schema appena introdotto; quindi consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} L^{\varepsilon,\eta}_{sub} u^\varepsilon_\eta = f \quad \text{in } G\,, \\ u^\varepsilon_\eta \in \mathcal{H}_0(G), \end{cases} \tag{125}$$

in cui intendiamo

$$L^{\varepsilon,\eta}_{sub} = \varepsilon^2 Y^2 + \sum_{i,j=1}^q \partial_{x_i}(\{a^\varepsilon_\eta(z))_{ij}\partial_{x_j}) + Y \tag{126}$$

dove la matrice dei coefficienti è la *$\mathcal{K}$-regolarizzata* della matrice $a^\varepsilon(z)$ secondo il procedimento indicato nella (124). Si osservi che in tutte le considerazioni che seguiranno in questo

paragrafo consideriamo il parametro $\varepsilon > 0$ fissato. Grazie alla proprietà (A_3') è immediato verificare che esiste una ed una sola $u_\eta^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G)$ che risolve il problema (125) per $\eta > 0$ fissato, nel senso che

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\eta^\varepsilon(u_\eta^\varepsilon, v) = -\int_G f(z)v(z)dz \quad \forall v \in \mathcal{H}_0(G), \\ u_\eta^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G), \end{cases} \tag{127}$$

dove $\mathcal{M}_\eta^\varepsilon : \mathcal{H}_0(G) \times \mathcal{H}_0(G) \to \mathbb{R}$ è la seguente forma bilineare

$$\mathcal{M}_\eta^\varepsilon(u, v) = \int_G (a_\eta^\varepsilon D_{\overline{z}_0} u, D_{\overline{z}_0} v)dz + \varepsilon^2 \int_G Yu Yv dz + \int_G u(Yv)dz. \tag{128}$$

Il comportamento della successione di soluzioni (u_η^ε) al variare del parametro η è stabilito dalla seguente

Proposizione 14 *Siano $u_\eta^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G)$ ed $u^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G)$ le uniche soluzioni deboli rispettivamente dei problemi (125) e (76); allora, per $\eta \to 0$*

$$u_\eta^\varepsilon \to u^\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{H}_0(G)\text{-debole;} \tag{129}$$

in particolare essendo $\mathcal{H}_0(G) \hookrightarrow L^2(G)$ in modo compatto segue anche

$$u_\eta^\varepsilon \to u^\varepsilon \quad \text{in } L^2(G) \text{ -forte .} \tag{130}$$

Inoltre è importante far notare che sono facilmente ottenibili stime del tipo (81) e (82) per la soluzione u_η^ε del problema (125), ovvero

$$\| u_\eta^\varepsilon \|_{\mathcal{H}_0^{\overline{z}_0}(G)} \leq c_1 \tag{131}$$

e

$$\| u_\eta^\varepsilon \|_{L^2(G)} \leq c_2 \tag{132}$$

dove le costanti c_1 e c_2 sono indipendenti sia dal parametro η che dal parametro ε.

Premesso ciò ritorniamo al nostro obiettivo fondamentale che è quello di costruire una particolare classe di funzioni test. Poniamo allora

$$v_\eta^\varepsilon(z) = v_0(z) + \varepsilon \tilde{v}_1^\eta(z, \zeta) + \varepsilon^2 \tilde{v}_2^\eta(z, \zeta) \tag{133}$$

per $\zeta = (D(\varepsilon^{-1})z)$ dove $v_0(z) \in C_0^\infty(G)$ mentre $\tilde{v}_j^\eta(z, \cdot)$, per $j = 1, 2$, rappresentano le estensioni periodiche rispetto al pavage intrinseco $\{B_k\}$ delle funzioni $v_j^\eta(z, \cdot)$ che adesso specificheremo:

$C_1)$ $v_1^\eta(z, \zeta) = \sum_{s=1}^q \beta_\eta^s(\zeta) \frac{\partial v_0(z)}{\partial x_s}$, nella quale $\beta_\eta^s(\zeta)$ per $s = 1, \ldots, q$ è l' unica soluzione, in senso debole, del problema (notare che d' ora in avanti, per non appesantire la notazione, sottointendiamo il simbolo di sommatoria sugli indici ripetuti)

$$(\mathcal{P}_1^\eta) \quad \begin{cases} \mathcal{A}^\eta(\beta_\eta^s, \phi) = -\int_B a_{is}^\eta(\zeta)\partial_{\zeta_i}\phi(\zeta)d\zeta \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_\#(B), \\ \beta_\eta^s \in \mathcal{H}_\#(B), \end{cases} \tag{134}$$

dove

$$\mathcal{A}^\eta : \mathcal{H}_\#(B) \times \mathcal{H}_\#(B) \to \mathbb{R}$$

è la forma bilineare definita da

$$\mathcal{A}^\eta(\phi, \psi) = \int_B a_{ij}^\eta(\zeta)\partial_{\zeta_j}\phi\partial_{\zeta_i}\psi d\zeta + \int_B Y_{\zeta,\tau}\phi Y_{\zeta,\tau}\psi d\zeta - \int_B \phi Y_{\zeta,\tau}\psi d\zeta. \tag{135}$$

L' esistenza e l' unicità di una soluzione debole del problema $(\mathcal{P}_1^\eta)$, per $\eta > 0$ fissato, grazie alla (A_3'), è garantita dal Lemma 10; inoltre con discorsi analoghi a quelli utilizzati per provare la Proposizione 14, si verifica immediatamente che per $\eta \to 0$,

$$\beta_\eta^s \to \beta^s \quad \text{in } \mathcal{H}_\#(B)\text{-debole} \tag{136}$$

per ogni $s = 1, \dots, q$ dove $\beta^s(\zeta)$, per $s = 1, \dots, q$, è l' unica soluzione debole del problema

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta^s, \psi) = -\int_B a_{is}(\zeta)\partial_{\zeta_i}\psi(\zeta)d\zeta, \\ \beta^s \in \mathcal{H}_\#(B), \end{cases} \tag{137}$$

in cui $\mathcal{A}$ è la forma bilineare definita sempre dalla (135), considerando in questa i coefficienti $a_{ij}(\zeta)$ anzicché quelli $\mathcal{K}$-*regolarizzati*. Facciamo osservare che il problema $(\mathcal{P}_1^\eta)$ rappresenta la formulazione debole del problema aggiunto sulla cella di base B, per $s = 1, \dots, q$

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0^\eta)^*\beta_\eta^s(\zeta) + Y_{\xi,\tau}^2\beta_\eta^s(\zeta) = -\sum_{i=1}^q \partial_{\zeta_i}(a_{is}^\eta(\zeta)) \quad \text{in } B, \\ \beta_\eta^s(\cdot) \quad B_k - \textit{periodica}. \end{cases} \tag{138}$$

Infatti, grazie alla simmetria dei coefficienti, l' aggiunto dell' operatore con coefficienti $\mathcal{K}$-*regolarizzati* $(\mathcal{L}_0^\eta + Y_{\xi,\tau}^2)$ risulta semplicemente l' operatore $((\mathcal{L}_0^\eta)^* + Y_{\xi,\tau}^2)$ dove

$$(\mathcal{L}_0^\eta)^* = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{\xi_i}(a_{ij}^\eta(\zeta)\partial_{\xi_j}) - \langle \xi, BD_\xi \rangle + \partial_\tau.$$

Grazie alla regolarità dei coefficienti e dei dati, grazie al Lemma 11 ed al Lemma 12 (ipoellitticità dell' operatore considerato) si verifica facilmente che l' estensione periodica rispetto alla variabile microscopica di periodicità

$$\tilde{v}_1^\eta(z,\zeta) = \sum_{s=1}^{q} \tilde{\beta}_\eta^s(\zeta)\frac{\partial v_0(z)}{\partial x_s} \tag{139}$$

è una soluzione di

$$((\mathcal{L}_0^\eta)^*\tilde{v}_1^\eta + Y_{\xi,\tau}^2\tilde{v}_1^\eta + (\mathcal{L}_1^\eta)^* v_0)(z,\cdot) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{N+1} \tag{140}$$

dove $(\mathcal{L}_1^\eta)^* = (\mathcal{L}_1^\eta)$, ovvero l' operatore $\mathcal{L}_1^\eta$, i cui coefficienti sono $\mathcal{K}$-*regolarizzati*, è simmetrico. $C_2)$ $v_2^\eta(z,\zeta) = \sum_{l,s=1}^q \chi_\eta^{ls}(\zeta)\frac{\partial^2 v_0(z)}{\partial x_l \partial x_s}$ dove $\chi_\eta^{ls}(\zeta)$ per $l, s = 1, \dots, q$ è l' unica soluzione del seguente problema aggiunto sulla cella elementare

$$(\mathcal{P}_2^\eta) \quad \begin{cases} \mathcal{A}^\eta(\chi_\eta^{ls}, \psi) = -\int_B (a_{ls}^{hom,\eta} - b_{ls}^\eta(\zeta))\psi d\zeta \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_\#(B), \\ \chi_\eta^{ls} \in \mathcal{H}_\#(B), \end{cases} \tag{141}$$

in cui $\mathcal{A}^\eta$ è la forma bilineare definita dalla (135) mentre per ogni $l, s = 1, \dots, q$

$$a_{ls}^{hom,\eta} = \frac{1}{|B|}\int_B (a_{ls}^\eta(\zeta) + a_{li}^\eta(\zeta)\partial_{\zeta_i}\beta_\eta^s(\zeta))d\zeta \tag{142}$$

e

$$b_{ls}^\eta(\zeta) = a_{ls}^\eta(\zeta) + a_{li}^\eta(\zeta)\partial_{\zeta_i}\beta_\eta^s(\zeta) + \partial_{\zeta_i}(a_{il}^\eta(\zeta)\beta_\eta^s(\zeta)) \tag{143}$$

Si osservi che i coefficienti indicati nella (142) rappresentano i coefficienti dell' operatore omogeneizzato

$$(\mathcal{L}_\eta^{hom})_{agg} = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}^{hom,\eta}\partial_{x_j}) - \langle x, BD \rangle + \partial_t \tag{144}$$

relativo all' operatore $(L^{\varepsilon,\eta}_{sub})^*$ e che possono essere facilmente costruiti seguendo il procedimento formale indicato nel paragrafo (7). Anche in tal caso si può verificare che la simmetria di $(a^\eta_{ij}(\zeta))$ implica quella di $(a^{hom,\eta}_{ij})$.
D' altronde costruendo i coefficienti dell' operatore $(\mathcal{L}^{hom}_\eta)$, relativo però allo operatore $(L^{\varepsilon,\eta}_{sub})$, avremmo ottenuto per questi, per $l,s=1,\dots,q$

$$b^{hom,\eta}_{ls}=\frac{1}{|B|}\int_B (a^\eta_{ls}(\zeta)+a^\eta_{li}\partial_{\xi_i}w^s_\eta(\zeta))d\zeta \tag{145}$$

nella quale $w^s_\eta(\zeta)$ per $s=1,\dots,q$ è l' unica soluzione del problema

$$\begin{cases} B^\eta(w^s_\eta,\phi)=-\int_B a^\eta_{is}(\zeta)\partial_{\xi_i}\phi(\zeta)d\zeta \quad \forall\phi\in\mathcal{H}_\#(B), \\ w^s_\eta\in\mathcal{H}_\#(B), \end{cases} \tag{146}$$

dove

$$B^\eta:\mathcal{H}_\#(B)\times\mathcal{H}_\#(B)\to\mathbb{R}$$

è la forma bilineare definita da

$$B^\eta(\phi,\psi)=\int_B a^\eta_{ij}(\zeta)\partial_{\xi_j}\phi\partial_{\xi_i}\psi d\zeta+\int_B Y_{\xi,\tau}\phi Y_{\xi,\tau}\psi d\zeta+\int_B \phi Y_{\xi,\tau}\psi d\zeta. \tag{147}$$

Ma, come si può facilmente verificare con semplici argomenti, risulta per $s=1,\dots,q$

$$\beta^s_\eta(\zeta)=w^s_\eta(\zeta) \quad \text{q.o. in } B. \tag{148}$$

Pertanto l' operatore indicato nella (144) rappresenta l' aggiunto dello operatore $(\mathcal{L}^{hom}_\eta)$

$$(\mathcal{L}^{hom}_\eta)^*=(\mathcal{L}^{hom}_\eta)_{agg},$$

ossia l' omogeneizzato dell' aggiunto dell' operatore $(L^{\varepsilon,\eta}_{sub})$ è proprio l' aggiunto dell' operatore omogeneizzato $(\mathcal{L}^{hom}_\eta)$ grazie alla simmetria dei coefficienti $a^{hom,\eta}_{ij}$ e grazie alla validità della (148).
Chiusa adesso questa parentesi necessaria per evitare eventuali ambiguità, osserviamo che per $\eta>0$ fissato l' esistenza e l' unicità di una soluzione del problema $(\mathcal{P}^\eta_2)$ sono garantite grazie alla proprietà (A'_3) ed al Lemma 10:
in particolare, per l' applicabilità del Lemma 10, si tenga presente che per ogni $l,s=1,\dots,q$

$$\int_B (a^{hom,\eta}_{ls}-b^\eta_{ls}(\zeta))d\zeta=0$$

in quanto

$$\int_B \partial_{\xi_i}(a^\eta_{il}(\zeta)\beta^s_\eta(\zeta))d\zeta=0$$

grazie alla (105).
Di fondamentale importanza risulta poi la seguente

Proposizione 15 *Indichiamo con A^{hom}_η la matrice $q\times q$ i cui coefficienti, costanti, sono indicati nella (142) e sia poi B^η la matrice $q\times q$ definita nel seguente modo*

$$(B^\eta)_{ls}=\int_B b^\eta_{ls}(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta \quad \textit{per } l,s=1,\dots,q \tag{149}$$

dove $\psi(\zeta)$ è una arbitraria funzione di $\mathcal{H}_\#(B)$ ed i coefficienti b^η_{sl}, per $l,s=1,\dots,q$, sono quelli indicati nella (143). Allora

$$A^{hom}_\eta\to A^{hom} \quad \textit{per } \eta\to 0 \tag{150}$$

e

$$B^\eta \to B \quad \text{per } \eta \to 0 \tag{151}$$

dove i coefficienti di A^{hom} *sono dati da*

$$a_{ls}^{hom} = \int_B (a_{ls}(\zeta) + a_{li}(\zeta)\partial_{\xi_i}\beta^s(\zeta))d\zeta,$$

mentre la matrice B *è*

$$(B)_{ls} = \int_B b_{ls}(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta$$

nella quale, per $l, s = 1, \dots, q$

$$b_{ls}(\zeta) = a_{ls}(\zeta) + a_{li}(\zeta)\partial_{\xi_i}\beta^s(\zeta) + \partial_{\xi_i}(a_{il}(\zeta)\beta^s(\zeta)).$$

Osserviamo che grazie alla Proposizione 15, procedendo come per la verifica della Proposizione 14, si ottiene che per ogni $l, s = 1, \dots, q$

$$\chi_\eta^{ls} \to \chi^{ls} \quad \text{in } \mathcal{H}_\#(B)\text{-debole} \tag{152}$$

dove χ^{ls} è l' unica soluzione per $l, s = 1, \dots, q$ del problema

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\chi^{ls}, \psi) = -\int_B (a_{ls}^{hom} - b_{ls}(\zeta))\psi(\zeta)d\zeta, \\ \chi^{ls} \in \mathcal{H}_\#(B), \end{cases} \tag{153}$$

Sottolineiamo che il problema $(\mathcal{P}_2^\eta)$ rappresenta la formulazione variazionale del seguente problema aggiunto sulla cella di base B, per $l, s = 1, \dots, q$

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0^\eta)^* \chi_\eta^{ls}(\zeta) + Y_{\xi,\tau}^2 \chi_\eta^{ls}(\zeta) = (a_{ls}^{hom,\eta} - b_{ls}^\eta(\zeta)) \quad \text{in } B, \\ \chi_\eta^{ls}(\cdot) \quad B_k - \textit{periodica}, \end{cases} \tag{154}$$

dove i coefficienti $a_{ls}^{hom,\eta}$ e $b_{ls}^\eta(\zeta)$ sono indicati rispettivamente nella (142) e (143). Come prima, grazie alla regolarità dei coefficienti e dei dati, grazie al Lemma 11 e 12, si può mostrare che l' estensione periodica

$$\tilde{v}_2^\eta(z, \zeta) = \sum_{l,s=1}^{q} \tilde{\chi}_\eta^{ls}(\zeta) \frac{\partial^2 v_0(z)}{\partial x_l \partial x_s} \tag{155}$$

è una soluzione di

$$((\mathcal{L}_0^\eta)^* \tilde{v}_2^\eta + Y_{\xi,\tau}^2 \tilde{v}_2^\eta + (\mathcal{L}_1^\eta)^* \tilde{v}_1^\eta + (\mathcal{L}_2^\eta)^* v_0)(z, \cdot) = (\mathcal{L}_\eta^{hom})^* v_0(z) \quad \text{in } \mathbb{R}^{N+1}, \tag{156}$$

dove l' aggiunto dell' operatore con coefficienti $\mathcal{K}$-*regolarizzati* $(\mathcal{L}_2^\eta)$ è

$$(\mathcal{L}_2^\eta)^* = \sum_{i,j=1}^{\eta} \partial_{x_i}(a_{ij}^\eta(\zeta)\partial_{x_j}) - \langle x, BD\rangle + \partial_t,$$

mentre $(\mathcal{L}_\eta^{hom})^*$ rappresenta l' operatore indicato nella (144).
Inoltre, grazie alla proprietà di convergenza espressa dalla (150), risulta per $\eta \to 0$

$$(\mathcal{L}_\eta^{hom})^* g(z) \to (\mathcal{L}^{hom})^* g(z) \tag{157}$$

per ogni $g(z) \in C_0^\infty(G)$, con

$$(\mathcal{L}^{hom})^* = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}^{hom}\partial_{x_j}) - \langle x, BD\rangle + \partial_t \tag{158}$$

dove a_{ij}^{hom} rappresentano i coefficienti della matrice A^{hom} o, se si vuole, i coefficienti definiti nella (118) come si è fatto osservare in precedenza.
Quindi ricapitolando abbiamo definito la funzione $v_\eta^\varepsilon(z)$ tramite la (133) dove, per $j = 1, 2$, $\tilde{v}_j^\eta(z, \cdot) \in C_{per}^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ per ogni $z \in G$ e $\tilde{v}_j^\eta(\cdot, \zeta) \in C_0^\infty(G)$ per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$. Di conseguenza

$$v_\eta^\varepsilon(z) \in C_0^\infty(G) \tag{159}$$

e naturalmente

$$v_\eta^\varepsilon(z) \in \mathcal{H}_0(G). \tag{160}$$

A questo punto grazie alla regolarità dei coefficienti e della funzione $v_\eta^\varepsilon(z)$ possiamo calcolare direttamente il seguente *sviluppo aggiunto*

$$(L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* v_\eta^\varepsilon(z) =$$

$$= (L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* v_0(z) + \varepsilon (L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* \tilde{v}_1^\eta(z, D(\varepsilon^{-1})z) + \varepsilon^2 (L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* \tilde{v}_2^\eta(z, D(\varepsilon^{-1})z); \tag{161}$$

ricordiamo, a tal proposito, che si era definita la funzione $v_\eta^\varepsilon(z)$ tramite la (133) dove comunque intendevamo $\zeta = D(\varepsilon^{-1})z$.
Allora tenendo presente la (90) è immediato verificare che per $j = 1, 2$

$$(L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* \tilde{v}_j^\eta(z, D(\varepsilon^{-1})z) = \varepsilon^{-2}[((\mathcal{L}_0^\eta)^* + Y_{\xi,\tau}^2)\tilde{v}_j^\eta](z, D(\varepsilon^{-1})z) +$$

$$+ \varepsilon^{-1}[(\mathcal{L}_1^\eta)^* \tilde{v}_j^\eta](z, D(\varepsilon^{-1})z) + \varepsilon^0[((\mathcal{L}_2^\eta)^* + 2Y_{x,t}Y_{\xi,\tau})\tilde{v}_j^\eta](z, D(\varepsilon^{-1})z). \tag{162}$$

Pertanto, grazie alla precedente, lo sviluppo aggiunto indicato nella (161) può essere espresso nella forma

$$(L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* v_\eta^\varepsilon(z) =$$

$$= \varepsilon^{-1}[((\mathcal{L}_0^\eta)^* + Y_{\xi,\tau}^2)\tilde{v}_1^\eta + (\mathcal{L}_1^\eta)^* v_0](z, \zeta) +$$

$$+ \varepsilon^0[((\mathcal{L}_0^\eta)^* + Y_{\xi,\tau}^2)\tilde{v}_2^\eta + (\mathcal{L}_1^\eta)^* \tilde{v}_1^\eta + (\mathcal{L}_2^\eta)^* v_0](z, \zeta) +$$

$$+ \varepsilon^1[((\mathcal{L}_2^\eta)^* + 2Y_{x,t}Y_{\xi,\tau})\tilde{v}_1^\eta + (\mathcal{L}_1^\eta)^* \tilde{v}_2^\eta](z, \zeta) +$$

$$+ \varepsilon^2[((\mathcal{L}_2^\eta)^* + 2Y_{x,t}Y_{\xi,\tau})\tilde{v}_2^\eta + Y_{x,t}^2 v_0](z, \zeta) +$$

$$+ \varepsilon^3[Y_{x,t}^2 \tilde{v}_1^\eta](z, \zeta) + \varepsilon^4[Y_{x,t}^2 \tilde{v}_2^\eta](z, \zeta) \tag{163}$$

dove abbiamo nuovamente esplicitato la presenza della variabile microscopica di periodicità ζ.
Adesso dovrebbe essere chiara la particolare scelta effettuata sulle nostre funzioni; si ricordi infatti che $\tilde{v}_1^\eta(z, \zeta)$ definita dalla (139) è stata costruita in modo da soddisfare la (140) mentre $\tilde{v}_2^\eta(z, \zeta)$ definita dalla (155) soddisfa invece la (156).
Queste proprietà ci consentono di poter riscrivere il precedente sviluppo aggiunto nella seguente forma

$$(L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* v_\eta^\varepsilon(z) = (\mathcal{L}_\eta^{hom})^* v_0(z) + \varepsilon g_1^\eta(z, \zeta) + \varepsilon^2 g_2^\eta(z, \zeta) + \varepsilon^3 g_3^\eta(z, \zeta) + \varepsilon^4 g_4^\eta(z, \zeta) \tag{164}$$

dove con g_j^η, per $j = 1, \ldots, 4$, abbiamo indicato i termini racchiusi entro parentesi quadre nella (163) che moltiplicano potenze successive di ε. Nel prossimo paragrafo mostreremo come sfruttando questa particolare forma di sviluppo aggiunto dedotta da una oculata scelta di funzioni test sia facilmente verificabile la convergenza del procedimento di omogeneizzazione.

9 Omogeneizzazione

Adesso siamo pronti ad utilizzare tutti i vari risultati accumulati per provare la convergenza del procedimento omogeneizzazione.
Dunque, assegnata $a(z) \in S_{\mathcal{KFP}}$, consideriamo il seguente problema di Dirichlet per i valori al contorno sul sottoinsieme aperto e limitato G di $\mathbb{R}^{N+1}$

$$\begin{cases} L^{\varepsilon}_{sub} u^{\varepsilon} = f \quad \text{in } G\,, \\ u^{\varepsilon} \in \mathcal{H}_0(G), \end{cases} \tag{165}$$

dove $f \in L^2(G)$.
Consideriamo poi il seguente problema omogeneizzato

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{hom} u = f \quad \text{in } G, \\ u \in \mathcal{H}_0^{\overline{z}_0}(G), \end{cases} \tag{166}$$

dove con $\mathcal{L}^{hom}$ intendiamo l' operatore di Kolmogorov-Fokker-Planck

$$\mathcal{L}^{hom} = \sum_{i,j=1}^{q} \partial_{x_i}(a_{ij}^{hom} \partial_{x_j}) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{167}$$

i cui coefficienti a_{ij}^{hom}, per $i,j = 1,\dots,q$, sono quelli relativi alla matrice A^{hom} indicata nella Proposizione 15 oppure, il che è lo stesso, quelli forniti dalla relazione (118).
Naturalmente è necessario chiarire in che senso intendiamo che una funzione $u \in \mathcal{H}_0^{\overline{z}_0}(G)$ sia soluzione debole del problema (166). Allora diciamo che $u \in \mathcal{H}_0^{\overline{z}_0}(G)$ è soluzione debole di (166) se verifica la seguente identità integrale

$$\int_G (a^{hom} D_{\overline{z}_0} u(z), D_{\overline{z}_0}\psi(z))dz + \int_G u(z)(Y\psi(z))dz = -\int_G f(z)\psi(z)dz \tag{168}$$

per ogni $\psi(z) \in C_0^{\infty}(G)$. Facciamo presente che al momento non sono disponibili risultati di esistenza e di unicità per la soluzione debole del problema (166) come appena definita. Possiamo adesso enunciare il seguente Teorema che contiene il risultato finale e conclusivo del nostro lavoro.

Teorema 16 *Sia $u^{\varepsilon} \in \mathcal{H}_0(G)$ la soluzione debole, per ε fissato, del problema (165). Allora, a meno di una sottosuccessione,*

$$u^{\varepsilon} \to u \quad \textit{in } L^2(G)\textit{-debole} \tag{169}$$

dove $u \in \mathcal{H}_0^{\overline{z}_0}(G)$ è una soluzione debole del problema (166).

Prima di passare alla dimostrazione notiamo che l' esistenza di una soluzione debole del problema omogeneizzato è garantita, nel nostro caso, dalla esistenza di una successione ad essa convergente.
Dimostrazione. Cominciamo col far presente che grazie alle relazioni di convergenza (136) e (152) ed alle proprietà del pavage intrinseco è immediato verificare che

$$\tilde{v}_j^{\eta}(z, D(\varepsilon^{-1})z) \to \tilde{v}_j(z, D(\varepsilon^{-1})z) \quad \text{in } L^2(G)\text{- debole}, \tag{170}$$

dove, per $j = 1,2$, $\tilde{v}_j^{\eta}$ sono le funzioni definite rispettivamente dalle (139) e (155) mentre

$$\tilde{v}_1(z, D(\varepsilon^{-1})z) = \sum_{s=1}^{q} \tilde{\beta}^s(D(\varepsilon^{-1})z)\frac{\partial v_0(z)}{\partial x_s}$$

e

$$\tilde{v}_2(z, D(\varepsilon^{-1})z) = \sum_{l,s=1}^{q} \tilde{\chi}^{ls}(D(\varepsilon^{-1})z)\frac{\partial^2 v_0(z)}{\partial x_l \partial x_s}.$$

Allora, utilizzando la notazione distribuzionale e scegliendo come famiglia di funzioni test la v_η^ε definita nella (133), il problema (127) implica il seguente

$$\langle u_\eta^\varepsilon, (L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* v_\eta^\varepsilon\rangle = \langle f, v_\eta^\varepsilon\rangle \quad v_\eta^\varepsilon \in \mathcal{H}_0(G). \tag{171}$$

Adesso avendo presente lo sviluppo aggiunto (164) possiamo riscrivere la relazione precedente nella forma

$$\langle f, v_\varepsilon^\eta\rangle = \langle u_\eta^\varepsilon, (L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* v_\eta^\varepsilon\rangle =$$

$$= \langle u_\eta^\varepsilon, (\mathcal{L}_\eta^{hom})^* v_0\rangle + \varepsilon\langle u_\eta^\varepsilon, g_1^\eta\rangle + \varepsilon^2\langle u_\eta^\varepsilon, g_2^\eta\rangle + \varepsilon^3\langle u_\eta^\varepsilon, g_3^\eta\rangle + \varepsilon^4\langle u_\eta^\varepsilon, g_4^\eta\rangle.$$

Grazie alla regolarità di cui godono le funzioni $g_j^\eta(z,\zeta)$ sia nella variabile macroscopica che in quella microscopica e ricordato che

$$\| u_\eta^\varepsilon \|_{L^2(G)} \leq c$$

dove c costante è una costante indipendente dai parametri η ed ε, si ottiene facilmente che

$$|\langle u_\eta^\varepsilon, g_j^\eta\rangle| \leq c_j$$

per $j = 1, \ldots, 4$ dove le costanti c_j sono indipendenti tanto dal parametro η quanto dal parametro ε. Pertanto, grazie a queste considerazioni, si ha che

$$|\langle u_\eta^\varepsilon, (L_{sub}^{\varepsilon,\eta})^* v_\eta^\varepsilon\rangle - \langle u_\eta^\varepsilon, (\mathcal{L}_\eta^{hom})^* v_0\rangle| \leq C\varepsilon, \tag{172}$$

dove C è una costante che non dipende né da η né da ε. Quindi

$$|\langle f, v_\eta^\varepsilon\rangle - \langle u_\eta^\varepsilon, (\mathcal{L}_\eta^{hom})^* v_0\rangle| \leq C\varepsilon; \tag{173}$$

grazie alla (170), alla (157) ed alla Proposizione 14, passando al limite nella precedente per $\eta \to 0$, si ha

$$|\langle f, v^\varepsilon\rangle - \langle u^\varepsilon, (\mathcal{L}^{hom})^* v_0\rangle| \leq C\varepsilon, \tag{174}$$

e poiché

$$v^\varepsilon \to v_0 \quad \text{in } L^2(G)\text{-debole}$$

mentre, a meno di una sottosuccessione,

$$u^\varepsilon \to \underset{\sim}{u} \quad \text{in } \mathcal{H}_0^{\overline{\Xi}_0}(G)\text{- debole},$$

passando al limite nella (174) per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$\langle u, (\mathcal{L}^{hom})^* v_0\rangle = \langle f, v_0\rangle \tag{175}$$

ovvero $u \in \mathcal{H}_0^{\overline{\Xi}_0}(G)$ è una soluzione debole del problema omogeneizzato.

References

[1] BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G.: Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North Holland, Amsterdam, (1978).

[2] SANCHEZ-PALENCIA E.: Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Lectures Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, (1980).

[3] LIONS J.L.: Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control. Science Press, Beijing, China. Gordon and Breach, New York, (1981).

[4] BAKHVALOV N.S., PANASENKO G.P.: Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media. Mathematics and its Applications, Vol. 36, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1990).

[5] JIKOV V.V., KOZLOV S.M., OLEINIK O.A.: Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[6] BREZIS H.: Analyse Fonctionelle. Masson, Paris, (1983).

[7] SANCHEZ-PALENCIA E.: Homogenization in mechanics: a survey of solved and open problems, *Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino* **44**, 1, (1986), 1-45.

[8] DE GIORGI E., SPAGNOLO S.: Sulla convergenza degli integrali dell' energia per operatori ellittici del secondo ordine. *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **8** (1973), 391-411.

[9] SPAGNOLO S.: Convergence in energy for elliptic operators. Proc. Third Symp. Numer. Solut. Partial Diff. Equat. (College Park, 1975), 469-498, Academic Press, San Diego, 1976.

[10] MURAT F.: Compacitè par compensation. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **5** (1978), 489-507.

[11] TARTAR L.: Compensated compactness and applications to partial differential equations. Nonlinear analysis and mechanics. Heriot-Watt Symposium vol. IV. Research Notes in Mathematics 39, 136-211, Pitman, London, 1979.

[12] GIOVANDITTI M.: Homogenization and subelliptic regularization for a class of Kolmogorov-Fokker-Planck operators, *in preparazione.*

[13] LANCONELLI E.: Problemi al contorno per una classe di operatori ultraparabolici semilineari, *Seminario di Analisi, Dip. Mat. Univ. Bologna*, (A.A. 1995/96), Tecnoprint, Bologna.

[14] LANCONELLI E.: On a class of Kolmogorov-Fokker-Planck operators, Proceeding of the Conference *" Elliptic and Parabolic PDE's and Applications "*, Capri, Settembre 1994, Pitman Research Notes in Mathematics.

[15] LANCONELLI E., POLIDORO S.: On a class of hypoelliptic evolution operators, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Partial Diff. Eqs.* **52**, 1 (1994), 26-63.

[16] LANCONELLI E., LASCIALFARI F.: A boundary value problem for a class of quasi-linear operators of Fokker-Planck type, *preprint 1996.*

[17] POLIDORO S.: On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov- Fokker-Planck type, *Le Matematiche*, **39**, (1994), 53-105.

[18] POLIDORO S.: A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations, *preprint 1994.*

[19] POLIDORO S.: Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov-Fokker-Planck equations, *Rend. Mat., in corso di stampa.*

[20] MOGAVERO C., POLIDORO S.: A finite difference method for a boundary value problem related to the Kolmogorov equation, *Calculus, in corso di stampa.*

[21] MANFREDINI M.: Stime a priori e problema al contorno per una classe di operatori ultraparabolici, Tesi di Dottorato in Matematica, Università di Bologna, A.A. 1994-95.

[22] MANFREDINI M.: The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations, *Differential and Integral Equations, in corso di stampa.*

[23] MANFREDINI M., POLIDORO S.: Regolarità hölderiana per le soluzioni deboli di equazioni di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck in forma di divergenza, *Seminario di Analisi, Dip. Mat. Univ. Bologna*, (A.A. 1995-96), Tecnoprint, Bologna.

[24] BRAMANTI M., CERUTTI M.C., MANFREDINI M.: L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients, *Journal of Math. Anal. and its Appl., in corso di stampa.*

[25] MORBIDELLI D.: Formule di media e disuguaglianze di Harnack per una classe di operatori parabolici degeneri, *Seminario di Analisi, Dip. Mat. Univ. Bologna*, (A.A. 1994/95), Tecnoprint, Bologna.

[26] LASCIALFARI F.: Un problema al contorno per una classe di operatori tipo Fokker-Planck, *Seminario di Analisi, Dip. Mat. Univ. Bologna*, (A.A. 1995/96), Tecnoprint, Bologna.

[27] HÖRMANDER L.: Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* **119** (1967), 147-171.

[28] BIROLI M., MOSCO U., TCHOU N.A.: Homogenization by the Heisenberg group, *Publication du Laboratoire d' Analyse Numérique*, **R 94032**, 1994.

[29] BIROLI M., MOSCO U., TCHOU N.A.: Homogenization for degenerate operators with periodical coefficients with respect to the Heisenberg group, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, **322** (1996), 439-444.

[30] JERISON D.: The Poincarè inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition, *Duke Math.*, **53** (1986), 503-523.

[31] FRIEDRICHS K.O.: The identity of weak and strong estension of differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 132-151.

[32] FRANCHI B., SERAPIONI R., SERRA CASSANO F.: Champs de vecteurs, théorème d' approximation de Meyers-Serrin et phénomème de Lavrentev pour des fonctionelles dégénérés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, **320** (1995), 695-698.

[33] GAROFALO N., NHIEU D.M.: Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, in corso di stampa.

[34] KOHN J.J.: Pseudodifferential operators and hypoellipticity, *Proc. Simp. Pure Math.* **23**, 61-69, A.M.S., Providence, (1973).

[35] RADKEVIC E.: Hypoelliptic operators with multiple characterics, *Math. Ussr Sbornik*, **8** (1969), 181-206.

[36] TAYLOR M.E.: Pseudodifferential operators, Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1981.

[37] ADAMS R.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.